Corrigé

Exercice 1 (6 + 4 = 10 points)

1) $2\ln(4-x)-\ln(x+5)\leq \ln(x-1)$ (I)

C.E. : 1) $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$ 2) $x+5>0 \Leftrightarrow x>-5$ 3) $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ (1p)

$D_I =]1;4[$ (1p)

(I) $\Leftrightarrow \ln(4-x)^2 \leq \ln(x-1)(x+5)$

$\Leftrightarrow 16-8x+x^2 \leq x^2+4x-5$

$\Leftrightarrow -12x \leq -21$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{7}{4}$ (3p)

$S = \left[\frac{7}{4};4\right[$ (1p)

2) $(e^{x-1}+1)\left(\frac{e^{2x^2-1}}{e^{3x+1}}-1\right)=0$ (E)

$D_E = \mathbb{R}$ (0,5p)

(E)$\Leftrightarrow e^{x-1}+1=0$ ou $\frac{e^{2x^2-1}}{e^{3x+1}}-1=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{e^{x-1}}_{>0}=-1}_{impossible}$ ou $\frac{e^{2x^2-1}}{e^{3x+1}}=1$ (1p)

$\Leftrightarrow e^{2x^2-3x-2}=1$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$ (1p)

$\Delta = 9+16=25$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{3+5}{4} = 2 \end{cases}$$ (1p)

$S = \left\{-\frac{1}{2};2\right\}$ (0,5p)

Exercice 2 (3 points)

Tableau de variation (2p)

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(x)$ est négative sur $]-\infty;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$

$\Rightarrow$ La courbe C_3 correspond donc à la fonction f' (1p)

Exercice 3 (2 + 2 + 2 + 2 = 8 points)

1) 100 tablettes : $x = 1$ $\quad B(1) = 0$ (1p)
L'entreprise ne fait ni de bénéfice ni de perte si elle produit et vend 100 tablettes par semaine. (1p)

2) $B'(x) = 5 \cdot e^{-0,2x} + (5x-5) \cdot (-0,2)e^{-0,2x}$ (1p)
$= 5 \cdot e^{-0,2x} + (-x+1) \cdot e^{-0,2x}$
$= (5 - x + 1)e^{-0,2x}$ (1p)
$= (6-x)e^{-0,2x}$

3) $B'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - x = 0 \; ou \; \underbrace{\underbrace{e^{-0,2x}}_{>0} = 0}_{impossible} \Leftrightarrow x = 6$ (1p)

x	0		6		20
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$		↗	Max	↘	

(1p)

4) L'entreprise doit produire et vendre 600 tablettes par semaine pour réaliser un bénéfice maximal. (1p)

$B(6) = 25 \cdot e^{-1,2} \approx 7,5299$ Le bénéfice maximal s'élève à 7530 €. (1p)

Exercice 4 (4 + 3 + 3 = 10 points)

1) C.E. : $6 - 8x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}$ $\quad D_f = \left]-\infty; \frac{3}{4}\right[$ (1p+0,5p)

$\lim_{x\to-\infty} 5 - 2\ln\underbrace{(6-8x)}_{\to+\infty} = -\infty$ (1p)

$\lim_{x\to\frac{3}{4}^-} 5 - 2\ln\underbrace{(6-8x)}_{\to 0^+} = +\infty$ A.V. : $x = \frac{3}{4}$ (à gauche) (1p+0,5p)

2) $f'(x) = -2 \cdot \frac{-8}{6-8x} = \frac{16}{6-8x} \left(= \frac{8}{3-4x}\right) > 0$ pour tout $x \in D_f$ (2p)

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$
$f'(x)$	+	‖
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖

(1p)

3) $C_f \cap (Ox)$: $\quad f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(6-8x) = 5 \Leftrightarrow 6 - 8x = e^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{6-e^{\frac{5}{2}}}{8} \Leftrightarrow x \approx -0,77$ (1,5p)
$\Rightarrow A(-0,77; 0)$ (0,5p)
$C_f \cap (Oy)$: $\quad f(0) = 5 - 2\ln 6 \approx 1,42$ (0,5p)
$\Rightarrow B(0; 1,42)$ (0,5p)

Exercice 5 (2 + 2 + 2 = 6 points)

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0$ (1p)
   $\Delta = 36 - 20 = 16 \qquad x_1 = 1,\ x_2 = 5$ (1p)

2) $F'(x) = -1 + 6 \cdot \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} = \frac{-x^2+6x-5}{x^2} = f(x)$ (2p)

1) $\int_1^5 f(x)dx = F(5) - F(1) = (-5 + 6\ln 5 + 1) - (-1 + 0 + 5) = -8 + 6\ln 5 \approx 1{,}66$ u.a. (2p)

Exercice 6 (3 points)

$\int_{-2}^{1}(-x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{-2}^{1}$ (1p)

$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 - 2\right)$ (1p)

$= -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 6$

$= 3$ (1p)

Exercice 7 (1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 10 points)

1) $y = 0{,}061x + 1{,}509$ (1p)
2) (1p)

Rang de l'année : x_i	0	33	47	60	72	84
$z_i = \ln y_i$	0,7	1,1	1,4	1,6	1,8	1,9

3) $z = 0{,}015x + 0{,}677$ (1p)

4) $\ln y = 0{,}015x + 0{,}677$
   $\Leftrightarrow y = e^{0{,}015x+0{,}677}$ (1p)
   $\Leftrightarrow y = e^{0{,}677} \cdot e^{0{,}015x}$
   $\Leftrightarrow y = 1{,}968 \cdot e^{0{,}015x}$ (1p)

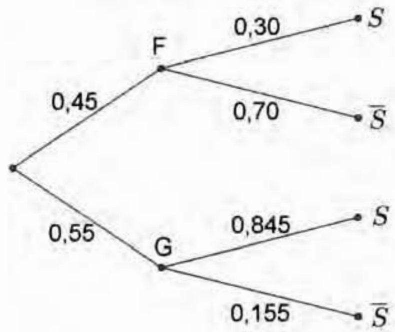
5) 2050 correspond à $x = 123$
   $y = 1{,}968 \cdot e^{1{,}845} \approx 12{,}5$
   En 2050, la population est estimée à 12,5 milliards d'habitants. (1p)

6) $1{,}968 \cdot e^{0{,}015x} > 14{,}6 \Leftrightarrow e^{0{,}015x} > 7{,}419 \Leftrightarrow 0{,}015x > \ln 7{,}419 \Leftrightarrow x > 133{,}6$ (1p)
   À partir de l'année 1927+134 = 2061, la population sera supérieure au double de la population actuelle. (1p)

7) $\lim_{t\to+\infty} \frac{20}{1+4\underbrace{e^{-0{,}025t}}_{\to 0}} = 20$ (A.H. : $y = 20$) (1p)
   Interprétation : Selon ce modèle, la population va s'approcher à long terme des 20 milliards d'habitants. (1p).

Exercice 8 (2 + 1 + 1 + 2 = 6 points)

1) Soit F l'événement «être une fille » et S l'événement « faire du sport »



(2p)

2) $p(S) = 0{,}45 \cdot 0{,}30 + 0{,}55 \cdot 0{,}845 \approx 0{,}600 \;\; (= 60{,}0\%)$ (1p)

3) $p(F \cap \bar{S}) = 0{,}45 \cdot 0{,}70 = 0{,}315 \;\; (= 31{,}5\%)$ (1p)

4) $p_{\bar{S}}(G) = \frac{p(G \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} \cong \frac{0{,}55 \cdot 0{,}155}{1-0{,}600} \approx 0{,}213 \;\; (= 21{,}3\%)$ (2p)

Exercice 9 (2 + 2 = 4 points)

1) Soit A l'événement « obtenir exactement 2 boules vertes »

$p(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_7^3}{C_{13}^5} = \frac{175}{429} \approx 0{,}408 \;\; (= 40{,}8\%)$ (2p)

2) Soit V l'événement « obtenir une boule verte ».

$p(V) = \frac{6}{13}$ (0,5p)

On répète 5 fois une épreuve de Bernoulli, il s'agit donc d'une loi binomiale $B\left(5; \frac{6}{13}\right)$.

$p(obtenir\ 2\ boules\ vertes) = C_5^2 \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{6}{13}\right)^{5-2} \approx 0{,}333 \;\; (= 33{,}3\%)$ (1,5p)