Mathématiques – Corrigé

I $\boxed{f(x)=\frac{1-3x}{2x^2-3x}}$ $\boxed{g(x)=(2+3x)\cdot\ln(3-6x)}$ $\boxed{h(x)=\frac{e^{-x}}{e^x-2}}$

1) C.E. pour f : $2x^2-3x\neq 0 \Leftrightarrow x(2x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq\frac{3}{2}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\,;\,\frac{3}{2}\}$ 1 p.

C.E. pour g : $3-6x>0 \Leftrightarrow -6x>-3 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

$D_g=]-\infty\,;\,\frac{1}{2}[$ 1 p.

C.E. pour h : $e^x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \ln 2$

$D_h=\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$ 1 p.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{2x^2-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{2x}=0$ A.H. : $y=0$ 2 p.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{(2+3x)}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{\ln\underbrace{(3-6x)}_{\to+\infty}}_{\to+\infty}=-\infty$ pas d'A.H. 2 p.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{\overbrace{-x}^{\to+\infty}}}{\underbrace{e^x}_{\to0}-2}\begin{matrix}\to+\infty\\ \to\ -2\end{matrix}=-\infty$ pas d'A.H. 2 p.

Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$.

3) $\forall x\in D_f$: $f'(x)=\frac{-3(2x^2-3x)-(1-3x)(4x-3)}{(2x^2-3x)^2}$

$=\frac{-6x^2+9x-4x+3+12x^2-9x}{(2x^2-3x)^2}$

$=\frac{6x^2-4x+3}{(2x^2-3x)^2}$ 2 p.

$\forall x\in D_g$: $g'(x)=3\ln(3-6x)+(2+3x)\frac{-6}{3-6x}$

$=3\ln(3-6x)-\frac{12+18x}{3-6x}$

$=3\ln(3-6x)-\frac{4+6x}{1-2x}$ 3 p.

$\forall x\in D_h$: $h'(x)=\frac{-e^{-x}(e^x-2)-e^{-x}\cdot e^x}{(e^x-2)^2}$

$=\frac{2e^{-x}-2}{(e^x-2)^2}$ 3 p.

4) $C_g\cap(Ox)$: $\forall x\in D_g$: $g(x)=0\Leftrightarrow 2+3x=0$ ou $3-6x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ ou $x=\frac{1}{3}$

$P_1(-\frac{2}{3};0)$ $P_2(\frac{1}{3};0)$ 3 p.

II 1) $\boxed{2\ln(x+7)=\ln(-x-3)+\ln(-2x-8)}$

C.E. : $x+7>0\Leftrightarrow x>-7$
$-x-3>0\Leftrightarrow x<-3$
$-2x-8>0\Leftrightarrow x<-4$

$E=]-7\,;\,-4[$ 2 p.

$\forall x\in E$: $2\ln(x+7)=\ln(-x-3)+\ln(-2x-8)$
$\Leftrightarrow \ln[(x+7)^2]=\ln(-x-3)(-2x-8)$
$\Leftrightarrow x^2+14x+49=2x^2+8x+6x+24$
$\Leftrightarrow x^2=25$
$\Leftrightarrow x=5\notin E$ ou $x=-5\in E$ $S=\{-5\}$ 4 p.

2) $\boxed{\frac{e^{x(x-2)}}{e^x}=\left(e^{x-3}\right)^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $\frac{e^{x(x-2)}}{e^x}=\left(e^{x-3}\right)^2$
$\Leftrightarrow e^{x^2-2x-x}=e^{2x-6}$
$\Leftrightarrow x^2-3x=2x-6$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$ $[\Delta=1]$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=3$ $S=\{2\,;\,3\}$ 4 p.

III 1) $\int_1^2\left(\frac{4}{3x^2}+\frac{3x^2}{4}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{4}{3}x^{-2}+\frac{3}{4}x^2\right)dx=\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left[-\frac{4}{3x}+\frac{x^3}{4}\right]_1^2$

$=(-\frac{2}{3}+2)-(-\frac{4}{3}+\frac{1}{4})=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+2=\underline{\underline{\frac{29}{12}}}$ 4 p.

2) $\int_{-1}^0(x-3)e^{6x-x^2}\,dx$ || $u(x)=6x-x^2$

$=\int_{-1}^0(-\frac{1}{2})u'(x)e^{u(x)}\,dx$ || $u'(x)=6-2x$

$=\left[-\frac{1}{2}e^{6x-x^2}\right]_{-1}^0$ || $-\frac{1}{2}u'(x)=x-3$

$=(-\frac{1}{2}e^0)-(-\frac{1}{2}e^{-7})$

$=\underline{\underline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-7}}}$ 3 p.

IV $\int_0^5 f(x)dx=\int_0^5\left(\frac{10x}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)dx$ || $u(x)=x^2+1$ $v(x)=x+1$

$=\int_0^5\left(5u'(x)[u(x)]^{-2}+2\cdot\frac{v'(x)}{v(x)}\right)dx$ || $u'(x)=2x$ $v'(x)=1$

$=\left[5\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+2\ln|x+1|\right]_0^5$ || $5u'(x)=10x$ $2v'(x)=2$

$=\left[-\frac{5}{x^2+1}+2\ln|x+1|\right]_0^5$ 4 p.

$=(-\frac{5}{26}+2\ln 6)-(-5+2\ln 1)$

$=5-\frac{5}{26}+2\ln 6$

$\approx 8{,}39$ u.a. 2 p.

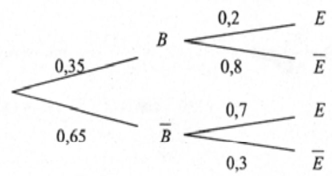
V 1) $r\approx 0{,}988>0{,}7$ un ajustement affine est donc valable. 1,5 p.

Équation de la droite des moindres carrés : $y=41{,}8x+81{,}3$ 1,5 p.

2) a) en 2020: $x=30\Rightarrow \hat{y}\approx 1335{,}4$
En 2020, la quantité de fret peut être estimée à 1335400 tonnes. 2 p.

b) $y>1000\Rightarrow \hat{x}>21{,}977 \Rightarrow \hat{x}=22$
On peut estimer que la quantité de fret dépassera en 2012 pour la première fois un million de tonnes. 2 p.

VI B = {la personne choisie ne s'oppose pas à la construction du barrage}
E = {la personne choisie est écologiste}



1) $p(\overline{B}$ et $\overline{E})=0{,}65\cdot 0{,}3=\underline{\underline{0{,}195}}$ 1 p.

2) $p(E)=0{,}35\cdot 0{,}2+0{,}65\cdot 0{,}7=\underline{\underline{0{,}525}}$ 2 p.

3) $p_E(B)=\frac{p(E\text{ et }B)}{p(E)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}2}{0{,}525}=\frac{0{,}07}{0{,}525}\approx\underline{\underline{0{,}133}}$ 2 p.

VII S_{10} : nombre d'objets (parmi 10) ayant un défaut.
S_{10} suit la loi binomiale de paramètres $p=0{,}08$ et $q=0{,}92$

1) $p(S_{10}=0)=0{,}92^{10}$
$\approx\underline{\underline{0{,}434}}$ 2 p.

2) $p(S_{10}\geq 2)=1-p(S_{10}=0)-p(S_{10}=1)$
$=1-C_{10}^0p^0q^{10}-C_{10}^1p^1q^9$
$=1-0{,}92^{10}-10\cdot 0{,}08\cdot 0{,}92^9$
$\approx\underline{\underline{0{,}188}}$ 3 p.