Corrigé

1. a) coefficient de corrélation linéaire : $r \approx 0{,}991$

$|r| \approx 0{,}991 \geq 0{,}7$

$\Rightarrow$ Il y a dépendance linéaire entre la production et la charge. **(2)**

b) $\overline{x} = 100$; $\overline{y} = 110{,}5$

point moyen : $G(100\,;110{,}5)$ **(1)**

$a \approx 0{,}61$; $b \approx 49{,}69$

droite de régression : $d: y = 0{,}61x + 49{,}69$ **(1)**

c) $x = 300 \Rightarrow y \approx 232{,}116$

Pour produire 300.000 produits, il faut une charge de 232.116 heures de travail. **(2)**

d) $y = 70 \Rightarrow x \approx 33{,}397$

La production mensuelle vaut 33.397 si la charge mensuelle vaut 70.000 heures de travail. **(2)**

8 points

2. $2\ln(2x-1) - \ln(5-2x) - \ln 2 = 0$

CE: $\alpha)$ $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$

$\beta)$ $5-2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{2}$ **(2)**

$\Rightarrow$ CE: $x \in \left]\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right[= I$

$\forall x \in I$:

$$2\ln(2x-1) = \ln(5-2x) + \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x-1)^2 = \ln\left[2(5-2x)\right]$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2(5-2x)$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 \cancel{-4x} + 1 = 10 \cancel{-4x} \qquad \textbf{(5)}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)(2x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x-3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin I \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2} \in I$$

$S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ **(1)**

8 points

3. $f: x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$

a) CE: $\dfrac{2x-1}{x+1} > 0$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-1}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\operatorname{dom} f = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ **(2)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\underbrace{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)}_{\to 2} = \ln 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\underbrace{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)}_{\to 2} = \ln 2 \qquad \textbf{(4)}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \ln\underbrace{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)}_{\to 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \ln\underbrace{\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)}_{\to +\infty} = +\infty$$

b) C_f admet une A.H. en $\pm\infty$ d'éq : $y = \ln 2$ **(1)**

C_f admet deux A.V. d'éq : $x = -1$ et $x = \dfrac{1}{2}$ **(1)**

c) $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)'}{\dfrac{2x-1}{x+1}}$$
$$= \frac{2(x+1) - (2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{2x-1}$$
$$= \frac{\cancel{2x} + 2 \cancel{-2x} + 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{2x-1} \qquad \textbf{(4)}$$
$$= \frac{3 \cdot \cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{2}}(2x-1)}$$
$$= \frac{3}{(x+1)(2x-1)}$$

12 points

4. $A = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

$u(x) = x^2 + x + 1$

$u'(x) = 2x + 1$

$$A = \int_{-2}^{-1} \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} 2 \cdot \underbrace{(2x+1)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(x^2+x+1)^{-2}}_{u^{-2}(x)}\,dx$$
$$= \left[2 \cdot \frac{(x^2+x+1)^{-1}}{-1}\right]_{-2}^{-1} \qquad \textbf{(5)}$$
$$= \left[-\frac{2}{x^2+x+1}\right]_{-2}^{-1}$$
$$= -\frac{2}{1} + \frac{2}{3}$$
$$= -\frac{4}{3} \quad (\approx -1{,}33)$$

$$B = \int_0^{\ln 3} \frac{-4e^{3x} + 2e^{2x} - 1}{e^x}\,dx$$
$$= \int_0^{\ln 3} \left(\frac{-4e^{3x}}{e^x} + \frac{2e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)dx$$
$$= \int_0^{\ln 3} \left(-4e^{2x} + 2e^x - 1e^{-x}\right)dx$$
$$= \int_0^{\ln 3} \left[-2 \cdot \underbrace{2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{e^{u(x)}} + 2 \cdot e^x + \underbrace{(-1)}_{v'(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{e^{v(x)}}\right]dx$$
$$= \left[-2e^{2x} + 2e^x + e^{-x}\right]_0^{\ln 3}$$
$$= \left(-2e^{2\ln 3} + 2e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}\right) - \left(-2e^0 + 2e^0 + e^0\right)$$
$$= -2e^{\ln 9} + 2 \cdot 3 + e^{\ln\frac{1}{3}} - 1$$
$$= -18 + 6 + \frac{1}{3} - 1$$
$$= -13 + \frac{1}{3} \qquad \textbf{(5)}$$
$$= -\frac{38}{3} \quad (\approx -12{,}67)$$

10 points

5. a) $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2(4-x^2)e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \quad |:2$$
$$\Leftrightarrow (2+x)(2-x)e^{-\frac{1}{2}x} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2+x = 0 \quad \text{ou} \quad 2-x = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{>0} = 0 \text{ imp}$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

C_f coupe (Ox) en $(-2\,;0)$ et $(2\,;0)$.

b) $\forall x \in \square$:

$$F'(x) = \left[4(x+2)^2 e^{-\frac{1}{2}x}\right]'$$
$$= 4\left[(x+2)^2\right]' e^{-\frac{1}{2}x} + 4(x+2)^2\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)'$$
$$= 4 \cdot 2(x+2) \cdot 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4(x+2)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 8(x+2)e^{-\frac{1}{2}x} - 2(x+2)^2 e^{-\frac{1}{2}x} \qquad \textbf{(5)}$$
$$= 2(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}\left[4 - (x+2)\right]$$
$$= 2(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}(2-x)$$
$$= 2(2+x)(2-x)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$= 2(4-x^2)e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$= f(x)$$

c) Aire de la partie colorée :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$
$$= F(2) - F(-2)$$
$$= 4(2+2)^2 e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} - 4\underbrace{(-2+2)}_{=0}{}^2 e^{-\frac{1}{2}(-2)} \qquad \textbf{(4)}$$
$$= 4 \cdot 16 \cdot e^{-1}$$
$$= \frac{64}{e} \quad \text{u.a.}$$
$$\approx 23{,}54 \quad \text{u.a.}$$

12 points

6. a) $p = p(S) = \dfrac{25}{25+5+30} = \dfrac{25}{60} = \dfrac{5}{12}(\approx 0{,}42)$ **(1)**

b) Notons :

$q = p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}(\approx 0{,}58)$

S_{10} : nombre de feux verts dans un parcours de dix feux tricolores.

Probabilité que sur son parcours l'automobiliste rencontre exactement six feux verts :

$$p(S_{10} = 6) = C_{10}^{6} p^6 q^4$$
$$= 210 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^4 \qquad \textbf{(3)}$$
$$\approx 0{,}1272$$

c) Probabilité que sur son parcours l'automobiliste rencontre que des feux verts :

$$p(S_{10} = 10) = C_{10}^{10} p^{10} q^0$$
$$= 1 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{10} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^0 \qquad \textbf{(3)}$$
$$\approx 0{,}00016$$

d) Probabilité que sur son parcours l'automobiliste rencontre au moins un feu vert :

$$p(S_{10} \geq 1) = 1 - p(S_{10} = 0)$$
$$= 1 - C_{10}^{0} p^0 q^{10}$$
$$= 1 - 1 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{10} \qquad \textbf{(3)}$$
$$\approx 0{,}9954$$

10 points

60 points