Corrigé.

I 1. C.E : 1. $2x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$

2. $7-x>0 \Leftrightarrow x<7$

3. $3x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $E=\left]\frac{5}{2};7\right[$ (2,5)

Pour tout réel x de E:
$$\begin{aligned}&\ln(2x-5)+\ln(7-x)=\ln(3x-5)\\ \Leftrightarrow\ &\ln[(2x-5)(7-x)]=\ln(3x-5)\\ \Leftrightarrow\ &(2x-5)(7-x)=3x-5\\ \Leftrightarrow\ &-2x^2+19x-35=3x-5\\ \Leftrightarrow\ &-2x^2+16x-30=0\\ \Leftrightarrow\ &-x^2+8x-15=0\end{aligned}$$ (2,5)

$\Delta=8^2-4\cdot(-1)\cdot(-15)=64-60=4$

$x_1=\frac{-8-2}{-2}=5$ et $x_2=\frac{-8+2}{-2}=3$; $x_1\in E$ et $x_2\in E$ $\Rightarrow$ $S=\{3;5\}$ (3)

2. $E=\mathbb{R}$. (0,5)

Pour tout réel x:
$$\begin{aligned}&\left(e^{4x}-e^2\right)\left(e^{x^2}-e^{5x}\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &e^{4x}-e^2=0 \text{ ou } e^{x^2}-e^{5x}=0\\ \Leftrightarrow\ &e^{4x}=e^2 \text{ ou } e^{x^2}=e^{5x}\\ \Leftrightarrow\ &4x=2 \text{ ou } x^2=5x\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{1}{2} \text{ ou } x(x-5)=0\end{aligned}$$ (1)

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=0$ ou $x=5$ $\Rightarrow$ $S=\left\{0;\frac{1}{2};5\right\}$ (2,5)

II C.E : $3-e^{4x}\neq 0 \Leftrightarrow e^{4x}\neq 3 \Leftrightarrow 4x\neq \ln 3 \Leftrightarrow x\neq \frac{\ln 3}{4}$

$\Rightarrow$ $D_f=\left]-\infty;\frac{\ln 3}{4}\right[\cup\left]\frac{\ln 3}{4};+\infty\right[$ (2)

Pour tout réel x de $\left]-\infty;\frac{\ln 3}{4}\right[\cup\left]\frac{\ln 3}{4};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{3\cdot 4e^{4x}\cdot\left(3-e^{4x}\right)-\left(3e^{4x}+1\right)\cdot\left(-4e^{4x}\right)}{\left(3-e^{4x}\right)^2}=\frac{36e^{4x}-12e^{8x}+12e^{8x}+4e^{4x}}{\left(3-e^{4x}\right)^2}=\frac{40e^{4x}}{\left(3-e^{4x}\right)^2}$$ (4)

III $A=e^{\ln\sqrt{16}}\cdot(-1)+e^{3-2\ln 2}\cdot\left(\frac{8}{e^3}\right)=-\sqrt{16}+8e^{-2\ln 2}=-4+8e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}=-4+8\cdot\frac{1}{4}=-2$ (5)

IV Posons $u(x)=5x^2+6x-8$ $\Rightarrow$ $u'(x)=10x+6$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}u'(x)=5x+3$

$$A=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(5x^2+6x-8\right)^3}{3}\right]_1^2=\frac{24^3}{6}-\frac{3^3}{6}=\frac{13824-27}{6}=\frac{13797}{6}=\frac{4599}{2}=2299{,}5$$ (4)

Posons $u(x)=7x^2+3$ $\Rightarrow$ $u'(x)=14x$ $\Rightarrow$ $\frac{9}{14}u'(x)=9x$

$$B=\left[\frac{9}{14}\ln\left(7x^2+3\right)\right]_0^1=\frac{9}{14}\ln 10-\frac{9}{14}\ln 3=\frac{9}{14}\ln\frac{10}{3}\approx 0{,}774$$ (4)

V 1. C.E : $8-7x>0 \Leftrightarrow x<\frac{8}{7}$ $\Rightarrow$ $D_f=\left]-\infty;\frac{8}{7}\right[$ (1)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(9-7\underbrace{\overbrace{\ln(8-7x)}^{\to+\infty}}_{\to+\infty}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{8}{7}\right)^-}\left(9-7\underbrace{\overbrace{\ln(8-7x)}^{\to 0^+}}_{\to-\infty}\right)=+\infty$ A.V. $x=\frac{8}{7}$ (3)

2. pas de cond. d'existence $\Rightarrow$ $D_f=\mathbb{R}$ (0,5)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7+9\underbrace{e^{\overbrace{5-8x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+9\underbrace{e^{\overbrace{5-8x}^{\to-\infty}}}_{\to 0}\right)=7$ A.H. $y=7$ (3,5)

VI 1. p(au moins un livre est écrit en français)

$=1-$p(aucun livre n'est écrit en français)$=1-\frac{C_{300}^4}{C_{450}^4}=\frac{1355114025}{1685905200}\approx 0{,}804$ (4)

2. p(tous les livres sont écrits en anglais)$=\frac{C_{200}^4}{C_{450}^4}=\frac{64684950}{1685905200}\approx 0{,}038$ (3)

VII Notons S l'événement "la capsule est défectueuse"

$p(S)=p=4\%=0{,}04$ et $p(\bar{S})=q=1-p=0{,}96$

S_{50} : nombre de capsules défectueuses parmi 50 capsules

S_{50} suit la loi binomiale de paramètres p et q

1. $p\left(S_{50}=0\right)=C_{50}^0\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^{50}\approx 0{,}130$ (3)

2. $p\left(S_{50}\geq 3\right)=1-C_{50}^0\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^{50}-C_{50}^1\cdot 0{,}04^1\cdot 0{,}96^{49}-C_{50}^2\cdot 0{,}04^2\cdot 0{,}96^{48}$
$\approx 0{,}323$ (4)

VIII 1. $r\approx 0{,}954 \Rightarrow |r|>0{,}7 \Rightarrow$ un ajustement affine est valable (1)

2. $\bar{x}=2{,}5$ et $\bar{y}=0{,}985$ $\Rightarrow$ G(2,5 ; 0,985) (2)

3. $y=0{,}046x+0{,}871$ (2)

4. $x=12$ $\Rightarrow$ $\hat{y}\approx 1{,}419$

Pour juillet 2008, le prix peut être estimé à 1,42 €. (2)