Mathématiques – Corrigé

I $\boxed{f(x)=\dfrac{1-4x^2}{x^2+4x}}$

1) C.E.: $x^2+4x\neq 0 \Leftrightarrow x(x+4)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq -4$

$D_f=\cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{R}\setminus\{-4\,;0\}$ 1 p.

2)

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2+4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\dfrac{1-4x^2 \to -63}{x^2+4x \to 0^-}=+\infty$

La droite d'équation $x=-4$ est asymptote (verticale) à la courbe représentative de f. 3 p.

3) $\forall x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{-8x(x^2+4x)-(1-4x^2)(2x+4)}{(x^2+4x)^2}$

$=\dfrac{-8x^3-32x^2-2x-4+8x^3+16x^2}{(x^2+4x)^2}$

$=\dfrac{-16x^2-2x-4}{(x^2+4x)^2}$ 3 p.

4) $C_f\cap(Ox)$: $f(x)=0\Leftrightarrow 1-4x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac14\Leftrightarrow x=\frac12$ ou $x=-\frac12$

$P_1(\frac12;0)$ $P_2(-\frac12;0)$ 2 p.

$C_f\cap(Oy)$: $x=0\notin D_f$ pas d'intersection avec (Oy) 1 p.

II 1) $\boxed{2\ln(3-x)-\ln(2x)=\ln(x+1)}$

C.E. : $3-x>0\Leftrightarrow x<3$

$2x>0\Leftrightarrow x>0$

$x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

$E=]0\,;3[$ 2 p.

$\forall x\in E$: $2\ln(3-x)-\ln(2x)=\ln(x+1)$

$\Leftrightarrow \ln[(3-x)^2]=\ln[2x(x+1)]$

$\Leftrightarrow 9-6x+x^2=2x^2+2x$

$\Leftrightarrow x^2+8x-9=0$ $\Delta=100$ $x_1=1\in E$ $x_2=-9\notin E$ $S=\{1\}$ 4 p.

2) $\boxed{(e^{-x}+3)\cdot(e^{x-3}-4)=0}$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $(e^{-x}+3)\cdot(e^{x-3}-4)=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}+3=0}_{impossible}$ ou $e^{x-3}-4=0$

$\Leftrightarrow e^{x-3}=4$

$\Leftrightarrow x-3=\ln 4$

$\Leftrightarrow x=3+\ln 4$ $S=\{3+\ln 4\}$ 4 p.

$\simeq 4{,}3863$

III 1) $\boxed{f(x)=\frac{9-6x}{(x^2-3x)^2}}$

$=(9-6x)(x^2-3x)^{-2}$

$=-3u'(x)[u(x)]^{-2}$

$u(x)=x^2-3x$

$u'(x)=2x-3$

$-3u'(x)=-6x+9$

$F(x)=-3\cdot\frac{[u(x)]^{-1}}{-1}+c\ (c\in 3)$

$=\frac{3}{x^2-3x}+c$ 2,5 p.

$F(-3)=1\Leftrightarrow\frac{3}{18}+c=1\Leftrightarrow c=\frac56$ $\underline{\underline{F(x)=\frac{3}{x^2-3x}+\frac56}}$ 1,5 p.

2) $\displaystyle\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2x-3}-\frac{1}{\sqrt{2x+7}}\right)dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{1}\left(\frac12\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}-\frac12\frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}}\right)dx$

$=\left[\frac12\ln|2x-3|-\frac12\cdot 2\sqrt{2x+7}\right]_{-3}^{1}$

$=\left[\frac12\ln|2x-3|-\sqrt{2x+7}\right]_{-3}^{1}$ 4 p.

$=(\frac12\ln 1-\sqrt9)-(\frac12\ln 9-\sqrt1)$

$=0-3-\ln3+1$

$=\underline{\underline{-\ln 3-2}}\ \simeq -3{,}0986$ 2 p.

$u(x)=2x-3$ $v(x)=2x+7$

$u'(x)=2$ $v'(x)=2$

$\frac12u'(x)=1$ $\frac12v'(x)=1$

IV $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4(3e^{-1+\frac12x}-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^4(6u'(x)e^{u(x)}-x)dx$

$=\left[6e^{-1+\frac12x}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4$

$=6e-8-\frac6e\approx 6{,}10$ u.a. 4 p.

$u(x)=-1+\frac12x$

$u'(x)=\frac12$

$6u'(x)=3$

V 1) $\boxed{f(x)=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}}$ C.E. : $x>0$

$1+\ln x\neq0\Leftrightarrow\ln x\neq-1\Leftrightarrow x\neq e^{-1}$

$D_f=]0\,;\frac1e[\cup]\frac1e\,;+\infty[$ 1 p.

$\forall x\in D_f$: $f'(x)=\dfrac{-\frac1x(1+\ln x)-(1-\ln x)\frac1x}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{\frac1x(-1-\ln x-1+\ln x)}{(1+\ln x)^2}=\dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$ 3 p.

2) $\boxed{f(x)=x^3\cdot e^{x^2-4x}}$ $D_f=\cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{R}$ 0,5 p.

$\forall x\in D_f$: $f'(x)=3x^2e^{x^2-4x}+x^3(2x-4)e^{x^2-4x}$

$=(3x^2+2x^4-4x^3)e^{x^2-4x}$

$=x^2(2x^2-4x+3)e^{x^2-4x}$ 2,5 p.

VI 1) $y=6{,}41x+75$ 2 p.

2) a) en 2013: $x=15\Rightarrow\hat y=171{,}2$

En 2013, le nombre de frontaliers peut être estimé à 171200. 2 p.

b) $y\geq 200\Rightarrow\hat x\geq19{,}5\Rightarrow\hat x=20$

On peut estimer que le nombre de frontaliers dépassera pour la première fois deux cent mille en 2018. 2 p.

c) en 2010 : $x=12\Rightarrow\hat y=152$ $\dfrac{152-87{,}7}{87{,}7}\approx0{,}73=73\%$

l'augmentation du nombre de frontaliers de l'an 2000 à l'an 2010 peut être estimée à 73 %. 2 p.

VII nombre de cas possibles : $C_{19}^7=50388$

a) $A=$ {le contrôleur découvre exactement deux personnes sans titre de transport valable}

Nombre de cas favorables à A : $C_5^2\cdot C_{14}^5=20020$

$p(A)=\dfrac{20020}{50388}\approx0{,}397$ 2 p.

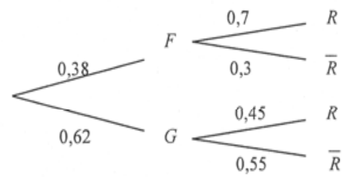
b) $B=$ {le contrôleur découvre au moins une personne sans titre de transport valable}

Nombre de cas favorables à $\overline{B}$: $C_5^0\cdot C_{14}^7=3432$

$p(B)=1-p(\overline{B})=1-\dfrac{3432}{50388}\approx0{,}932$ 3 p.

VIII a) $F=$ {l'élève choisi est une fille} $G=$ {l'élève choisi est un garçon}

$R=$ {l'élève choisi a réussi l'examen}



$p(R)=0{,}38\cdot0{,}7+0{,}62\cdot0{,}45=\underline{\underline{0{,}545}}$ 3 p.

b) S_8 : nombre de filles (parmi ~~8~~) qui ont réussi leur examen.

S_8 suit la loi binomiale de paramètres $p=0{,}7$ et $q=0{,}3$

$p(S_8=5)=\cancel{C_8^5\cdot0{,}7^5}\cdot0{,}3^3=\underline{\underline{0{,}254}}$ 3 p.

faux !