Corrigé

I a) Domaine de définition : $Df = \mathbb{R}$ **(0,5)**

b) Limites aux bornes du domaine et asymptotes éventuelles :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(3-\underbrace{4e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}\right) = -\infty \ ;$$ **(2)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(3-\underbrace{4e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x}^{\to-\infty}}}_{\to0}\right) = 3 \ ; \text{ A.H. d'éq. } y=3 \text{ en } +\infty$$ **(2)**

c) Dérivée et tableau des variations :

$f'(x) = -4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = 2e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ **(1,5+1)**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3

d) Points d'intersection avec les axes :

$C_f \cap (Ox)$:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3-4e^{-\frac{1}{2}x}=0 \Leftrightarrow 4e^{-\frac{1}{2}x}=3 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x=\ln\frac{3}{4} \Leftrightarrow x=-2\ln\frac{3}{4}\left(\Leftrightarrow x=2\ln\frac{4}{3}\right)$

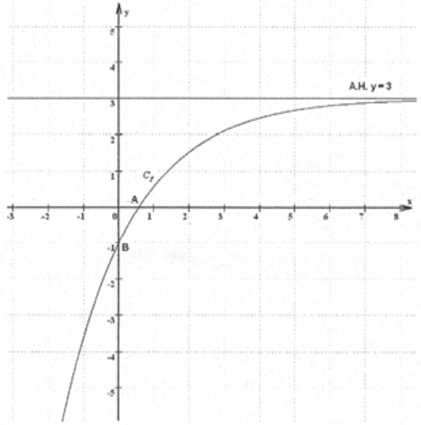
$-2\ln\frac{3}{4}\simeq 0,58$ $\Rightarrow$ point d'intersection $A\left(-2\ln\frac{3}{4};0\right)$ **(2)**

$C_f \cap (Oy)$: $f(0)=3-4e^{-\frac{1}{2}0}=3-4\cdot1=-1$ $\Rightarrow$ point d'intersection $B(0;-1)$ **(1)**

d) Tableau de valeurs et représentation graphique :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	6
$f(x)$	$\simeq -7,9$	$\simeq -3,6$	-1	$\simeq 0,6$	$\simeq 1,5$	$\simeq 2,1$	$\simeq 2,5$	$\simeq 2,8$

(3)



II

1) $I=\int_1^2 \frac{24x-9}{\sqrt{4x^2-3x+3}}dx = 2\int_1^2 \frac{3u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx = \left[6\sqrt{4x^2-3x+3}\right]_1^2$

$= 6\sqrt{16-6+3}-6\sqrt{4-3+3} = 6\sqrt{13}-12 \simeq 9,63$ **(4)**

Posons $u(x)=4x^2-3x+3$; $u'(x)=8x-3 \Leftrightarrow 3u'(x)=24x-9$

2) $J=\int_0^1 \frac{2x-1}{(3x^2-3x+2)^3}dx = \int_0^1 (2x-1)(3x^2-3x+2)^{-3}dx = \left[\frac{1}{3}\frac{(3x^2-3x+2)^{-2}}{-2}\right]_0^1$

$= \left[-\frac{1}{6(3x^2-3x+2)^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{6(2)^2}+\frac{1}{6(2)^2}\right) = -\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=0$ **(4)**

Posons $u(x)=3x^2-3x+2$; $u'(x)=6x-3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}u'(x)=2x-1$

III 1) C.E.: $x+3>0$ et $1-x>0 \Leftrightarrow x>-3$ et $x<1$ $\Rightarrow E=\left]-3;1\right[$ **(1,5)**

$\ln(x+3)=2\ln(1-x)-\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(x+3)+\ln 2=\ln(1-x)^2$

$\Leftrightarrow \ln 2(x+3)=\ln(1-x)^2$

$\Leftrightarrow 2(x+3)=(1-x)^2$

$\Leftrightarrow 2x+6=1-2x+x^2 \quad | -2x-6$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0$ **(1,5)**

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36>0$

$x_{1/2}=\frac{4\pm6}{2}=\begin{cases}\frac{10}{2}=5\notin E\\ \frac{-2}{2}=-1\in E\end{cases}$

$S=\{-1\}$ **(2)**

2) $(e^{2x}-5)(e^{-x^2}+9)=0$ $E=\mathbb{R}$ **(0,5)**

$\Leftrightarrow e^{2x}-5=0$ ou $e^{-x^2}+9=0$ **(0,5)**

$\Leftrightarrow e^{2x}=5$ ou $\underbrace{e^{-x^2}=-9}_{\text{impossible car } e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow 2x=\ln 5$

d'où $x=\frac{1}{2}\ln5=\ln\sqrt{5}\simeq0,8\in E$

$S=\{\ln\sqrt{5}\}$ **(2)**

IV $f(x)=\ln\frac{3-x}{2x+1}$ C.E.: $\frac{3-x}{2x+1}>0$ et $2x+1\neq0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$3-x$		+		+	0	−	
$2x+1$		−	0	+		+	
$\frac{3-x}{2x+1}$		−	‖	+	0	−	

$D_f=\left]-\frac{1}{2};3\right[$ **(3)**

$f(x)=\ln(3-x)-\ln(2x+1)$

$f'(x)=\frac{-1}{3-x}-\frac{2}{2x+1}=\frac{-(2x+1)-2(3-x)}{(3-x)(2x+1)}$

$=\frac{-2x-1-6+2x}{(3-x)(2x+1)}=\frac{-7}{(3-x)(2x+1)}$ **(3)**

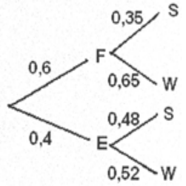
V 1) $e^{7x}-e^{2x}=e^{7x}\left(1-\frac{e^{2x}}{e^{7x}}\right)=e^{7x}\left(1-e^{2x-7x}\right)=e^{7x}\left(1-e^{-5x}\right)$ **(1)**

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{\overbrace{7x}^{\to-\infty}}}_{\to0}-\underbrace{e^{\overbrace{2x}^{\to-\infty}}}_{\to0}\right)=0$; A.H. d'éq. $y=0$ en $-\infty$ **(2)**

$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^{\overbrace{7x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}-\underbrace{e^{\overbrace{2x}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{e^{7x}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1-\underbrace{e^{\overbrace{-5x}^{\to-\infty}}}_{\to0}\right)}_{\to1}=+\infty$ **(2)**

$f.i.(+\infty)-(+\infty)$

VI Notons F l'événement « le séjour a lieu en France »,
E l'événement « le séjour a lieu à l'étranger »,
S l'événement « le séjour dure une semaine »,
W l'événement « le séjour dure un week-end ».



1) $p_E(S)=0,48$ **(2)**

2) $p(F \text{ et } S)=0,6\cdot0,35=0,21$ **(2)**

3) $p(S)=p(F \text{ et } S)+p(E \text{ et } S)=0,6\cdot0,35+0,4\cdot0,48=0,21+0,192=0,402$ **(2)**

VII Notons S l'événement « la boule tirée est blanche » ;

$p(S)=p=\frac{12}{25}=0,48$ et $p(\bar{S})=q=1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}=0,52$.

S_{10} = nombre de boules **blanches** obtenues en 10 tirages,

S_{10} suit la loi binomiale de paramètres p et q.

1) $p(S_{10}=6)=\underbrace{C_{10}^6}_{210}\cdot0,48^6\cdot0,52^4\simeq0,1878$ **(3)**

2) $p(S_{10}\geq2)=1-p(S_{10}=0)-p(S_{10}=1)=1-\underbrace{C_{10}^0}_{1}\cdot\underbrace{0,48^0}_{1}\cdot0,52^{10}-\underbrace{C_{10}^1}_{10}\cdot\underbrace{0,48^1}_{0,48}\cdot0,52^9\simeq0,9852$ **(4)**

VIII

1) $\bar{y}=\frac{35+37+43+49+50+57+60+65+70+83+89+y_{12}}{12}$

$\Leftrightarrow 61=\frac{638+y_{12}}{12} \quad |\cdot12$ **(2)**

$\Leftrightarrow 732=638+y_{12}$

$\Leftrightarrow y_{12}=94$ Il a vendu 94 voitures en décembre 2004.

2) $r\simeq0,9869$ (proche de 1), $|r|\geq0,7$, donc un ajustement affine est valable. **(1)**

3) rang de avril 2007 : 16 ; $\hat{y}(16)\simeq112,486\simeq112$ voitures vendues. **(2)**

4) $\hat{x}(135)\simeq20,15$; A partir de septembre 2007 (rang 21), il peut espérer vendre 135 voitures.

Réponse acceptée : août 2007 (rang 20). **(2)**