EXAMEN DE MATHEMATIQUES GENERALES (2007): CORRIGE

1. $\text{dom}f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ 1 p.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{9x^2}{4x^2} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow A.H.: y = \dfrac{9}{4}$ 1 p.

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = \dfrac{\frac{25}{4}}{0^+} = +\infty \Rightarrow A.V.: x = \dfrac{3}{2}$ 1 p.

$\cap Ox: y = 0,\ 2-3x = 0,\ x = \dfrac{2}{3},\ A(\frac{2}{3};0)$ 1 p.

$\cap Oy: x = 0,\ y = f(0) = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9},\ B(0;\frac{4}{9})$ 1 p.

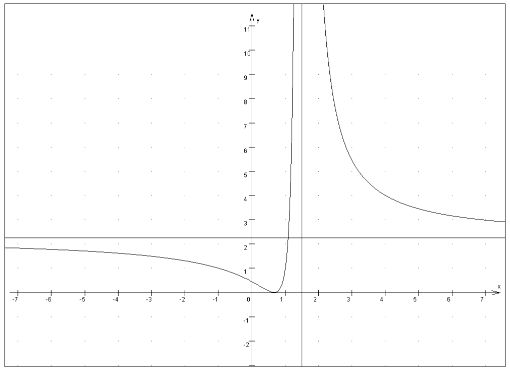
$$f'(x) = \frac{2(2-3x)(-3)(3-2x)^2 - (2-3x)^2 2(3-2x)(-2)}{(3-2x)^4} = \frac{2(2-3x)(3-2x)[-3(3-2x)+2(2-3x)]}{(3-2x)^4}$$

$$= \frac{2(2-3x)(-9+6x+4-6x)}{(3-2x)^3} = \frac{-10(2-3x)}{(3-2x)^3} = \frac{30x-20}{(3-2x)^3}$$ 3 p.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$2/3$		$3/2$		$+\infty$
$30x-20$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-2x)^3$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$9/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$9/4$

3 p.



3 p.

2. $C_f \cap Ox:\ f(x) = 0,\ 8-12x = 0,\ x = \dfrac{2}{3}$ 1 p.

$$A = \int_{2/3}^{2} \frac{-2(6x-4)}{3x^2-4x-15} = \Big[-2\ln\left|3x^2-4x-15\right|\Big]_{2/3}^{2} = -2\ln|-11| + 2\ln\left|-\tfrac{49}{3}\right| = 0,79$$ 7 p.

3. a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{6x-3x^2}{3x^3-9x^2}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{-\frac{1}{3}(9x^2-18x)}{3x^3-9x^2}dx = \Big[-\tfrac{1}{3}\ln\left|3x^3-9x^2\right|\Big]_{-2}^{-1} = -\tfrac{1}{3}\ln|-12| + \tfrac{1}{3}\ln|-60| = 0,5365$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{-9}{4-12x+9x^2}dx = \int_{-3}^{0} -9(2-3x)^{-2}dx = \left[-9\cdot\frac{1}{-3}\frac{(2-3x)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0} = \left[-\frac{3}{2-3x}\right]_{-3}^{0} = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{11} = -\tfrac{27}{22} = -1,2273$

c) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{-x^2\sqrt{x}+5x}{-2x\sqrt{x}}dx = \int_{2}^{3} (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}})dx = \left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{2}^{3} = \left[\tfrac{1}{4}x^2 - 5\sqrt{x}\right]_{2}^{3} = (\tfrac{9}{4} - 5\sqrt{3}) - (1 - 5\sqrt{2}) = -0,3392$

4. Conditions d'existence : $\left.\begin{array}{l} 3+2x>0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \\ 1-x>0 \Leftrightarrow x<1 \\ 2-x>0 \Leftrightarrow x<2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dom}E = \left]-\tfrac{3}{2};1\right[$ 2 p.

$\ln(3+2x)(2-x) = \ln(1-x)^2,\ 6-3x+4x-2x^2 = 1-2x+x^2,\ -3x^2+3x+5 = 0,\ \Delta = 9+60 = 69,$

$x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{69}}{-6} \simeq -0,88,\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{69}}{-6} \simeq 1,88$ (à écarter), $S = \{x_1\}$ 5 p.

5. a) A : « obtenir une boule rouge », $P(A) = \frac{25}{100} = 0,25$

S_n = nombre de fois qu'on obtient une boule rouge.

S_n suit une loi binomiale de paramètres n=6, p=0,25 et q=0,75.

$P(S_6 \geq 5) = C_6^5 \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^1 + C_6^6 \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,00439 + 0,00024 = 0,00464$

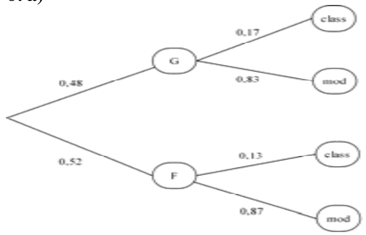
b) B : « obtenir une boule verte », $P(B) = \frac{40}{100} = 0,4$

S_n = nombre de fois qu'on obtient une boule verte.

S_n suit une loi binomiale de paramètres n=5, p=0,4 et q=0,6.

$P(S_5 < 4) = 1 - P(S_5 = 4) - P(S_5 = 5) = 1 - C_5^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^1 - C_5^5 \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^0 = 1 - 0,07680 - 0,01024 = 0,91296$

6. a)



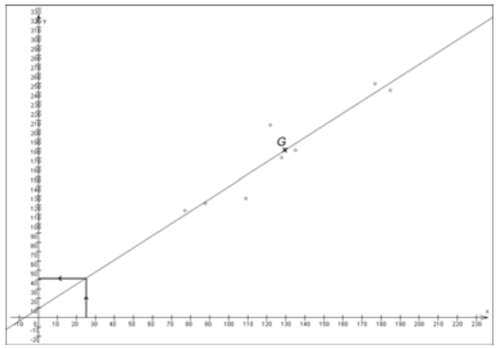
3 p.

b) P(garçon et enseignement moderne)=0,48 $\cdot$ 0,83=0,3984=39,84% 2 p.

P(fille et enseignement moderne)=0,52 $\cdot$ 0,87=0,4524=45,24% 2 p.

P(enseignement moderne)=0,3984+0,4524=0,8508=85,08% 2 p.

7. a)



b) $G(127,625\ ;\ 175,875)$ (graphique, voir ci-dessus).

c) $r = 0,9425$, proche de 1, donc un ajustement linéaire est justifié.

d) $y = 1,3046\cdot x + 9,3801$ (graphique, voir ci-dessus).

e) Si $x = 25$, alors $y = 1,3046\cdot 25 + 9,3801 = 41,9941$ (graphique, voir ci-dessus).

Donc, pour 25 lits, on peut estimer le nombre de postes de personnel non médical à 42.