Q1 (a) Exprimons z_1 sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\,(1-i\sqrt{3})}{4} \\ &= 1-i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Comme $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$, on a, en notant $\theta_1 = \arg(z_1) \pmod{2\pi}$:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \tfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

D'où : $\boxed{z_1 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}$. Pour z_2, remarquons que :

$$\begin{aligned} z_2 &= \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}}$. Finalement :

$$z_3 = -2\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\,e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

c'est-à-dire : $\boxed{z_3 = 2\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

(b) Z est bien imaginaire pur, car d'après (a) :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\left(2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7} \\ &= \frac{32\,e^{i\frac{5\pi}{3}}}{e^{i\frac{7\pi}{6}}} \\ &= 32\,e^{i\left(\frac{10\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)} \\ &= 32\,e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= \boxed{32\,i} \end{aligned}$$

(c) Sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} Z' &= \left(1-i\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(1-i\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) \\ &= -\sqrt{2}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

Sous forme exponentielle :

$$Z' = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot 2\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\,e^{i\frac{5\pi}{12}} \qquad (\ddagger)$$

De (†) et (‡), on déduit que :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{5\pi}{12}} &= \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right] \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\Re\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \boxed{\cos\tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Im\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \boxed{\sin\tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

Q2 (a) Posons $z = x+iy$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & |iz+3+i| = |\bar{z}-2-i| \\ \Longleftrightarrow\ & |(3-y)+i\,(x+1)| = |(x-2)+i\,(-1-y)| \\ \overset{()^2}{\Longleftrightarrow}\ & (3-y)^2+(x+1)^2 = (x-2)^2+(-1-y)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 9-6y+2x+1 = -4x+4+1+2y \\ \Longleftrightarrow\ & 6x-8y+5 = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble de points $\mathscr{E}$ cherché est donc la $\boxed{\text{droite}}$ d'équation cartésienne : $6x-8y+5=0$.

(b) Interprétons la condition :

$$\begin{aligned} & |\,iz+3+i\,| = |\,\bar{z}-2-i\,| \\ \Longleftrightarrow\ & |\,i\,(z-3i+1)\,| = |\,\overline{\bar{z}-2-i}\,| \\ \Longleftrightarrow\ & \underbrace{|\,i\,|}_{=1}\cdot|\,z+1-3i\,| = |\,z-2+i\,| \\ \Longleftrightarrow\ & |\,z-(-1+3i)\,| = |\,z-(2-i)\,| \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ cherché est donc la $\boxed{\text{médiatrice}}$ de $[AB]$ avec $A(-1+3i)$ et $B(2-i)$.

Q3 Voir recueil p. 7

Q4 (a) Relativement au repère indiqué, on a $B(1;1;0)$, $G(0;1;1)$ et $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right)$, d'où l'on tire que :

$$\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GM} = 1\cdot\tfrac{1}{2}+0\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+(-1)\cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$$

$$\|\overrightarrow{GB}\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{GM}\| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+1^2} = \tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

Ainsi donc :

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GM}}{\|\overrightarrow{GB}\|\cdot\|\overrightarrow{GM}\|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

On conclut que : $\boxed{\theta \simeq 106{,}8°}$

(b) Les coordonnées de C, I et E sont données par $C(0;1;0)$, $I(1;0;2)$ et $E(1;0;1)$. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CI}\,(1;-1;2)$ est un vecteur directeur de (CI) :

$$\boxed{(CI)\colon \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

De même, le vecteur $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{EM}\,(-1;1;2)$ est un vecteur directeur de (EM). Ainsi :

$$\boxed{(EM)\colon \begin{cases} x = 1-s \\ y = s \\ z = 1+2s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})}$$

(c) (CI) et (EM) sont-elles parallèles ?

$$\begin{aligned} & (CI) \text{ et } (EM) \text{ sont parallèles} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\colon \vec{u} = k \cdot \vec{v} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} 1 = k \cdot (-1) \\ -1 = k \cdot 1 \\ 2 = k \cdot 2 \end{cases} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible, donc les droites (CI) et (EM) ne sont *ni strictement parallèles, ni confondues.* Est-ce que les droites (CI) et (EM) sont sécantes ?

$$\begin{aligned} & (CI) \text{ et } (EM) \text{ sont sécantes} \\ \iff & \exists!(t;s)\colon \begin{cases} t = 1-s \\ 1-t = s & | \cdot 2 \\ 2t = 1+2s \end{cases} \\ \iff & \exists!(t;s)\colon \begin{cases} t+s = 1 & (1) \\ 2t+2s = 2 & (2) \\ 2t-2s = 1 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre (2) et (3), on obtient :

$$4t = 3 \iff \boxed{t = \tfrac{3}{4}}$$

Remplaçons dans (2) :

$$2 \cdot \frac{3}{4} + 2s = 2 \iff 2s = \frac{1}{2} \iff \boxed{s = \tfrac{1}{4}}$$

L'équation (1) est aussi vérifiée : $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \overset{!}{=} 1$. Donc le couple $(t;s) = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$ convient ! Les droites (CI) et (EM) sont donc *sécantes* (en $N\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$).

Q5 (a) Montrons que A, B et C ne sont pas alignés :

$$\begin{aligned} & A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\colon \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} -2 = k \cdot 2 \\ -1 = k \cdot 2 \\ 2 = k \cdot (-1) \end{cases} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} k = -1 \\ k = -\frac{1}{2} \\ k = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui est impossible, donc les points A, B et C définissent bien un plan.

(b) Notons $\vec{u}\,(3;-2;2)$ un vecteur directeur de d. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{aligned} & d \perp (ABC) \\ \iff & \begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} -6+2+4 \overset{!}{=} 0 \\ 6-4-2 \overset{!}{=} 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Par (b), $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC) :

$$\begin{aligned} & M(x;y;z) \in (ABC) \\ \iff & \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\ \iff & (x-1) \cdot 3 + (y+2) \cdot (-2) + (z-3) \cdot 2 = 0 \\ \iff & 3x - 2y + 2z - 13 = 0 \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{(ABC)\colon 3x - 2y + 2z - 13 = 0}$.

(d) D appartient bien à d :

$$\begin{aligned} D \in d \iff & \exists t \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} -6 = 3t \\ 2 = -2-2t \\ -8 = -4+2t \end{cases} \\ \iff & \exists t \in \mathbb{R}\colon \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

(e) H est le point d'intersection de d et (ABC) :

$$H(x;y;z) \in d \cap (ABC)$$
$$\iff \begin{cases} 3x-2y+2z-13=0 \\ x=3t \\ y=-2-2t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-4+2t \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 9t+4+4t-8+4t-13=0 \\ x=3t \\ y=-2-2t \\ z=-4+2t \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t=1 \\ x=3t \\ y=-2-2t \\ z=-4+2t \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\boxed{H(3;-4;-2)}$.

(f) La distance de D au plan (ABC) est donnée par :

$$\|\overrightarrow{DH}\| = \sqrt{9^2+(-6)^2+6^2} = \sqrt{153} = \boxed{3\sqrt{17}}$$

Q6 (a) Calculons avec $\vec{u}\,(3;0;-1)$ et $\vec{v}\,(2;1;0)$:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} \begin{pmatrix} 0\cdot 0-(-1)\cdot 1 \\ -(3\cdot 0-(-1)\cdot 2) \\ 3\cdot 1-0\cdot 2 \end{pmatrix} \iff \vec{u}\wedge\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = \vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal à $\mathcal{P}$:

$$M(x;y;z)\in\mathcal{P}$$
$$\iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 0$$
$$\iff (x-4)\cdot 1 + (y-1)\cdot(-2) + (z+1)\cdot 3 = 0$$
$$\iff x-2y+3z+1=0$$

Donc : $\boxed{\mathcal{P}\colon x-2y+3z+1=0}$.

(b) Notons $\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}\,(1;2;1)$ un vecteur normal à $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ sont parallèles}$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{R}\colon \overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = k\cdot\overrightarrow{n_{\mathcal{Q}}}$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{R}\colon \begin{cases} 1=k\cdot 1 \\ -2=k\cdot 2 \\ 3=k\cdot 1 \end{cases}$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{R}\colon \begin{cases} k=1 \\ k=-1 \\ k=3 \end{cases}$$

ce qui est impossible ! Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite Δ :

$$M(x;y;z)\in\Delta \iff \begin{cases} x-2y+3z+1=0 & (1) \\ x+2y+z-1=0 & (2) \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (2) de (1) :

$$-4y+2z+2=0 \iff \boxed{z=2y-1} \qquad (3)$$

Remplaçons (3) dans (1) :

$$x-2y+3\,(2y-1)+1=0 \iff \boxed{x=-4y+2}$$

En posant : $y=t$ $(t\in\mathbb{R})$, on a finalement :

$$\boxed{\Delta\colon \begin{cases} x=2-4t \\ y=t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-1+2t \end{cases}}$$

(c) Notons $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}\,(1;0;2)$ un vecteur normal à $\mathcal{R}$ et $\vec{w}\,(-4;1;2)$ un vecteur directeur de Δ. $\mathcal{R}$ et Δ sont parallèles si et seulement si :

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}\cdot\vec{w}=0 \iff 1\cdot(-4)+0\cdot 1+2\cdot 2 \overset{!}{=} 0$$

De plus, le point $B(2;0;-1)$ appartient à Δ (en choisissant $t=0$), mais $B\notin\mathcal{R}$ car :

$$2+2\cdot(-1)+1\neq 0$$

Donc $\mathcal{R}$ et Δ sont *strictement parallèles*, ce qui implique que les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ n'ont $\boxed{\text{aucun point commun}}$.