<table>
<tr><td>Code branche
MATHE II</td><td colspan="2">Ministère de l'Education nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse
EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Session 2013/2014</td></tr>
<tr><td>Épreuve
écrite</td><td rowspan="3">Branche

Mathématiques II</td><td rowspan="3">Division / Section

GE</td></tr>
<tr><td>Durée épreuve
2 h 00</td></tr>
<tr><td>Date épreuve
15. 09. 2014</td></tr>
</table>

Question 1 — $5+2+5=12$ points

Considérons les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \qquad z_2 = \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3} \qquad z_3 = -2\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(a) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.

(b) En déduire que le nombre $Z = \frac{(\overline{z_1})^5}{(z_2)^7}$ est imaginaire pur.

(c) Exprimer $Z' = z_1 \cdot z_3$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle et en tirer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Question 2 — $3+3=6$ points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant la condition suivante :

$$\left|iz+3+i\right| = \left|\overline{z}-2-i\right|$$

Décrire l'ensemble $\mathscr{E}$:

(a) par la *méthode analytique*, en posant $z = x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) ;

(b) par la *méthode géométrique*, en interprétant la condition.

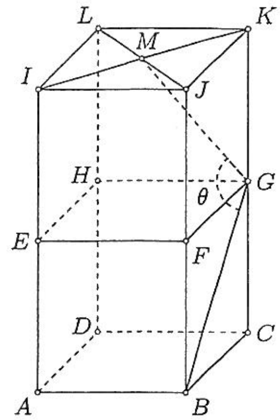
Question 3 — 5 points

Démontrer le théorème suivant :

> Si dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a : $\vec{u}\,(x;y;z)$ et $\vec{v}\,(x';y';z')$, alors les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont :
>
> $$\left(yz'-zy'\,;\ -(xz'-zx')\ ;\ xy'-yx'\right)$$

Question 4 $\hfill 4+2+6=12$ points

Deux cubes sont superposés comme l'indique la figure ci-contre. Le point M est le centre de la face $IJKL$. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA},\,\overrightarrow{DC},\,\overrightarrow{DH}\right)$.



(a) Notons θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GM}$. Calculer la valeur approchée de θ au dixième de degré près.

(b) Donner une représentation paramétrique de la droite (CI) et de la droite (EM).

(c) Étudier la position relative de ces deux droites.

Question 5 $\hfill 1+2+2+1+3+2=11$ points

Relativement au repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, considérons les points $A(1;-2;3)$, $B(-1;-3;5)$, $C(3;0;2)$ et $D(-6;2;-8)$, et soit d la droite définie par :

$$d\colon \begin{cases} x = 3t \\ y = -2-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = -4+2t \end{cases}$$

(a) Montrer que A, B et C définissent un plan.

(b) Vérifier que la droite d est perpendiculaire au plan (ABC).

(c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(d) Vérifier que $D \in d$.

(e) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC).

(f) En déduire la distance exacte du point D au plan (ABC).

Question 6 $\hfill 4+6+4=14$ points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(4;1;-1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}=3\vec{\imath}-\vec{k}$ et $\vec{v}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. Les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont définis par $\mathcal{Q}\colon x+2y+z-1=0$ et $\mathcal{R}\colon x+2z+1=0$.

(a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

(c) Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.