

Mathématiques II - Corrigé

I. On a : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

$$1) \quad z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_2 = 2 + 2i = 2(1 + i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad Z &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2 + 2i} \cdot \frac{2 - 2i}{2 - 2i} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i + 2\sqrt{6}i + 2\sqrt{6}}{4 + 4} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} + \frac{-2\sqrt{2}i + 2\sqrt{6}i}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i \end{aligned}$$

$$3) \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(4 + 2 + 1 = 7 points)

II. 1) a) $|2 - \bar{z}| = |iz - 1|$

$$|2 - \bar{z}| = |iz - 1| \cdot |i|$$

$$|2 - z| = |i^2 z - i|$$

$$|2 - z| = |-z - i|$$

$$|z - 2| = |z + i|$$

L'ensemble cherché est la médiatrice
du segment $[AB]$ avec $A(2)$ et $B(-i)$.

b) $\arg\left(-\frac{i}{z}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$$\arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{\pi}{3} + \pi \quad [2\pi]$$

$$\arg(i) - \arg(z) = \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$$

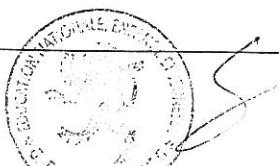
$$\frac{\pi}{2} - \arg(z) = \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\arg(z) = -\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

L'ensemble cherché est la demi-droite ouverte
d'origine O et dirigée par le vecteur \vec{w} tel que

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{-5\pi}{6}$$



$$2) z' = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \text{ avec } z \neq 1$$

$$= \frac{(1-i)(x+iy-i)}{x+iy-1} \text{ avec } (x;y) \neq (1;0)$$

$$= \frac{(x+y-1)+i(y-x-1)}{(x-1)+iy} \cdot \frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy}$$

$$= \frac{(x+y-1)(x-1)+i(x-1)(y-x-1)-iy(x+y-1)+(y-x-1)y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re}(z') = \frac{(x+y-1)(x-1)+(y-x-1)y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2-x+xy-y-x+1+y^2-xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{(x^2-2x+1)+(y^2-2y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)-1=0 \text{ avec } (x;y) \neq (1;0)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=1 \text{ avec } (x;y) \neq (1;0)$$

Γ est le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 1 privé du point A.

(3 + 3) + 7 = 13 points)

III. 1) Théorème 1 page 322

$$2) \overline{AB}(-2;2;-1) \quad \|\overline{AB}\| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\overline{AC}(-1;1;-4) \quad \|\overline{AC}\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|} = \frac{2+2+4}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{8}{9\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{9 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\widehat{BAC} \cong 51,1^\circ$$

(5 + 3 = 8 points)

IV. $\vec{u}(1;-2;1)$ et $\vec{v}(2;1;-1)$ ne sont pas colinéaires, donc d et d' ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 1+t = 2s+2 \\ 3-2t = s-4 \\ -2+t = -s+2 \end{cases} \quad \begin{cases} t-2s = 1 & (1) \\ 2t+s = 7 & (2) \\ t+s = 4 & (3) \end{cases}$$

$$(3): \quad t = 4 - s$$

$$\text{dans (1):} \quad 4 - s - 2s = 1$$

$$4 - 3s = 1$$

$$-3s = -3$$

$$s = 1$$

$$\text{dans (2):} \quad 2(4-s) + s = 7$$

$$8 - 2s + s = 7$$

$$-s = -1$$

$$s = 1$$

compatible

donc $s = 1, t = 3$.



Les droites d et d' sont ainsi sécantes et par conséquent coplanaires.

(4 points)



V.

1) $\vec{n}_1(1; -1; 2)$ et $\vec{n}_2(1; 1; 1)$ ne sont pas colinéaires, donc P_1 et P_2 sont sécants.

$$2) \begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ x + y + z - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2z - 4 \\ x + (x + 2z - 4) + z - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2z - 4 \\ 2x + 3z - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -\frac{2}{3}x + 5 \\ y = x + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 5\right) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -\frac{2}{3}x + 5 \\ y = -\frac{1}{3}x + 6 \end{cases}$$

Posons $x = -3t$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = t + 6 \\ z = 2t + 5 \end{cases}$$

3) $\vec{n}_3(2; 1; -1)$ et $\vec{u}(-3; 1; 2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_3 = -6 + 1 - 2 \neq 0$$

donc d et P_3 ne sont pas parallèles, ainsi ils sont sécants.

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = t + 6 \\ z = 2t + 5 \\ 2x + y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$2 \cdot (-3t) + t + 6 - (2t + 5) - 8 = 0$$

$$-6t + t + 6 - 2t - 5 - 8 = 0$$

$$-7t - 7 = 0$$

$$-7t = 7$$

$$t = -1$$

$$d \cap P_3 = \{I(3; 5; 3)\}$$

$$\text{Ainsi, } P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{I(3; 5; 3)\}$$



VI.

1) $\overline{AB}(-2 ; 1 ; 2)$ et $\vec{n}(2 ; 1 ; -1)$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) et P ne sont pas perpendiculaires.

2) $\overline{AB} \wedge \vec{n}$ est un vecteur normal à Q.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \qquad \overline{AB} \wedge \vec{n}(-3 ; 2 ; -4)$$

$$3) -3x + 2y - 4z + d = 0$$

$$\text{Or } A \in Q: \quad -3 + 4 - 12 + d = 0 \\ d = 11$$

$$Q: -3x + 2y - 4z + 11 = 0$$

$$3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

(1 + 2 + 2 = 5 points)

VII. 1) $\overline{AB}(1 ; 2 ; -1)$ et $\overline{AC}(0 ; 1 ; 2)$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

2) $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \qquad \overline{AB} \wedge \overline{AC}(5 ; -2 ; 1)$$

$$(ABC): \quad 5x - 2y + z + d = 0$$

$$\text{Or } A \in (ABC): \quad 5 + 6 + 2 + d = 0 \\ d = -13$$

$$(ABC): \quad 5x - 2y + z - 13 = 0$$

$$3) \text{ Aire}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 4 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{30} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$4) D \in (ABC) \Leftrightarrow 5 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 5 - 13 = 0 \\ \Leftrightarrow 15 + 4 + 5 - 13 = 0 \\ \Leftrightarrow 11 = 0$$



impossible, donc $D \notin (ABC)$

$$5) \begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = -2t - 2 \\ z = t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

6) $H \in d$ et $H \in (ABC)$

$$\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = -2t - 2 \\ z = t + 5 \\ 5x - 2y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

$$5 \cdot (5t + 3) - 2(-2t - 2) + (t + 5) - 13 = 0$$

$$25t + 15 + 4t + 4 + t + 5 - 13 = 0$$

$$30t + 11 = 0$$

$$t = -\frac{11}{30}$$

$$x_H = 5\left(-\frac{11}{30}\right) + 3 = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$

$$y_H = -2\left(-\frac{11}{30}\right) - 2 = \frac{22}{30} - \frac{60}{30} = -\frac{38}{30} = -\frac{19}{15}$$

$$z_H = -\frac{11}{30} + 5 = \frac{139}{30}$$

donc $H\left(\frac{7}{6}; -\frac{19}{15}; \frac{139}{30}\right)$.

7) La distance du point D au plan (ABC) est égale à $DH = \sqrt{\left(\frac{-55}{30}\right)^2 + \left(\frac{22}{30}\right)^2 + \left(\frac{-11}{30}\right)^2} = \frac{11\sqrt{30}}{30}$.

(1 + 3 + 1 + 1 + 2 + 4 + 2 = 14 points)

