BRANCHE : GE **Mathématiques II** 15.10.2013 CORRIGÉ

Question 1 *(3+4+2=9 points)*

On considère les nombres complexes $z_1=\sqrt{5}e^{-i\frac{7\pi}{6}}$ et $z_2=\sqrt{5}+\sqrt{15}i$.

3 pts. a) $z_1=-\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+i\sqrt{5}\frac{1}{2}=\frac{-\sqrt{15}+i\sqrt{5}}{2}\simeq-1{,}93+i1{,}12$ donc $M_1(z_1)\in EFGH$.

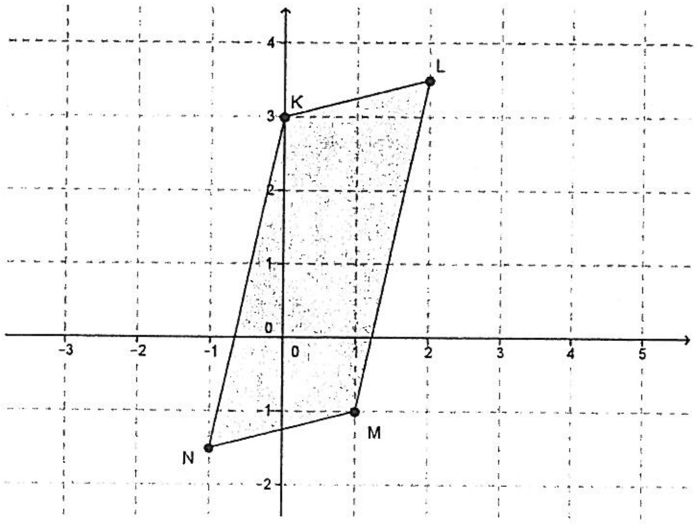
4 pts. b) $|z_2|=\sqrt{5+15}=2\sqrt{5}$ $z_2=2\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}\simeq4{,}47e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $M_2(z_2)\notin ABCD$

2 pts. c) $\frac{z_2}{z_1}=\frac{2\cancel{\sqrt{5}}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\cancel{\sqrt{5}}e^{-i\frac{7\pi}{6}}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{9\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{2}}=-2i$

Question 2 *(4+2+2+3+5=16 points)*

4 pts. a) Voir cours.

2 pts. b)



2 pts. c) $KLMN$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{KL}}=z_{\overrightarrow{NM}}\Leftrightarrow z_L-z_K=z_M-z_N\Leftrightarrow z_N=z_K-z_L+z_M$

Donc $z_N=3i-2-\frac{7i}{2}+1-i=-1-\frac{3}{2}i$

3 pts. d) *I est le point d'intersection des diagonales de KLMN*

$\Leftrightarrow I=mil[KM]\Rightarrow z_I=\frac{z_K+z_M}{2}=\frac{3i+1-i}{2}=\frac{1}{2}+i$

1 pts. e) $\left(\overrightarrow{KL};\overrightarrow{KM}\right)=\arg\frac{z_M-z_K}{z_L-z_K}=\arg\frac{1-i-3i}{2+\frac{7}{2}i-3i}$

2 pts. $=\arg\frac{1-4i}{2+\frac{1}{2}i}=\arg\frac{(1-4i)\left(2-\frac{1}{2}i\right)}{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\arg\frac{2-\frac{1}{2}i-8i-2}{4+\frac{1}{4}}=\arg\frac{-\frac{17}{2}i}{\frac{17}{4}}$

2 pts. $=\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}$

Question 3 *(3+4=7 points)*

2 pts.

a) Soit $z=x+iy$, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$Z=\frac{x+iy-i}{x+iy+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}=\frac{(x^2+y^2-1)+i(\cancel{-xy}-x\cancel{+xy}-x)}{D}$$

1 pts.

$$Z=\underbrace{\frac{x^2+y^2-1}{D}}_{\mathrm{Re}(Z)}+i\cdot\underbrace{\frac{-2x}{D}}_{Im(Z)}$$

2 pts.

b) $$\mathrm{Re}(Z)=\mathrm{Im}(Z)\Leftrightarrow x^2+y^2-1=-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+0)^2=(\sqrt{2})^2$$

2 pts.

Donc $\mathrm{Re}(Z)=\mathrm{Im}(Z)\Leftrightarrow M_1(z_1)\in C\left(\Omega(-1;0),\sqrt{2}\right)$, $z_1\neq -i$

Question 4 *(4+1+6=11 points)*

1 pts.

a) Soit I le milieu de $[AB]$, alors $I\left(\frac{3+1}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2};\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{2}\right)\Rightarrow I(2;1;-1)$

1 pts.

$\overrightarrow{AB}\left(1-3;\frac{3}{2}-\frac{1}{2};\frac{-5}{2}-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(-2;1;-3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$$M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\cdot(-2)+(y-1)\cdot 1+(z+1)(-3)=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+y-3z+4-1-3=0$$

2 pts.

$$\Leftrightarrow -2x+y-3z=0$$

1 pts.

b) $O\in P$ *car* $-2\cdot 0+0-3\cdot 0=0$.

c) $$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{9+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{38}{4}}$$

2 pts.

$$\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{38}{4}}$$

3 pts.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\cdot\cos\left(\widehat{AOB}\right)\Rightarrow\cos\left(\widehat{AOB}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\frac{3\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-5}{2}}{\frac{38}{4}}=\frac{\frac{12}{4}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{\frac{38}{4}}=\frac{\frac{10}{4}}{\frac{38}{4}}=\frac{5}{19}$$

1 pts.

$$\widehat{AOB}\simeq 74{,}74°$$

Question 5 *(2+5+3+3=13 points)*

a) $\vec{n}_1(1;1;-1)$ *et* $\vec{n}_2(0;2;1)$ sont des vecteurs normaux aux plans P_1 respectivement P_2.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc $\vec{n}_1(1;1;-1)$ *et* $\vec{n}_2(0;2;1)$ ne sont pas colinéaires.

2 pts. Ainsi P_1 et P_2 sont sécants selon une droite.

b) $\begin{cases} x+y-z+4=0 & L_1 \\ 2y+z-1=0 & L_2 \end{cases}$

$\Rightarrow L_2 : z=-2y+1$

2 pts. $\Rightarrow L_2$ dans $L_1 : x=-y-2y+1-4=-3y-3$

1 pts. On pose $y=t$, où $t\in\mathbb{R}$

2 pts. D'où $\Delta : \begin{cases} x=-3t-3 \\ y=t \\ z=-2t+1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

1 pts. c) $\vec{u}(-3;1;-2)$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{n}_3(2;-2;1)$ est un vecteur normal à P_3.

$\vec{u}\cdot\vec{n}_3=-3\cdot2+1\cdot(-2)+(-2)\cdot1=-10\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas orthogonaux.

2 pts. Ainsi Δ n'est pas parallèle à P_3.

d) Par c) nous savons que Δ coupe P_3 en un unique point $M(x;y;z)$ tel que :

2 pts. $\begin{cases} x=-3t-3 \\ y=t \\ z=-2t+1 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3t-3 \\ y=t \\ z=-2t+1 \\ 2(-3t-3)-2t+(-2t+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3t-3 \\ y=t \\ z=-2t+1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=2 \end{cases}$

1 pts. D'où $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};2\right)$ l'unique solution du système *(S)*.

Question 6 *(4 points)*

1 pts. $\overrightarrow{AB}(-1-3;0-(-2);3-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(-4;2;-1)$

1 pts. $r=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$.

2 pts. $M(x;y;z)\in S(A,r) \quad \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2=\sqrt{21}^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=21$

3/3