Corrigé Mathématiques II, 2012-13 GE Septembre

I. voir théorème 3 page 324

4

II. a)

$z_1 = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pm\frac{\pi}{6}$ rad mod(2π)

$z_1 \in 4^e quadrant \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ mod(2π)

6

Donc $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) forme trigonométrique : $Z = \frac{\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\frac{23\pi}{12}} = 4e^{-i\frac{\pi}{12}}$

5 forme algébrique : $Z = 4e^{i\frac{5\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

c) $4e^{-i\frac{\pi}{12}} = 4 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

2 Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

III. a) $|\bar{z} - 2 + 3i| < 4$

$\Leftrightarrow |z - 2 - 3i| < 4$

3 ⇔ M(z) se trouve à l'intérieur du cercle de centre A(2+3i) et de rayon 4, cercle exclu.

b) $arg(-i \cdot (z-3)) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow arg(-i) + arg(z-3) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow arg(z-3) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

4 ⇔ M(z) ∈ demi-droite ouverte d'origine B(3) et de vecteur directeur $\vec{v}$ avec $(\vec{i}\,; \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$

IV. $|z - 2i| = |z + 3i - 5|$

$\Leftrightarrow |x + iy - 2i| = |x + iy + 3i - 5|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9$

$\Leftrightarrow 10x - 10y - 30 = 0$

4 $\Leftrightarrow x - y - 3 = 0$

⇔ M(z) appartient à une droite d'équation x – y – 3 = 0

V. a) $\overrightarrow{n_1}(2;\,-5;3)$ et $\overrightarrow{n_2}(-1;\,2;1)$ sont des vecteurs normaux de P_1, resp. P_2.

2 $\frac{2}{-1} \neq \frac{-5}{2} \Longrightarrow \nexists k \in \mathbb{R}\ t.q.\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}.$

Donc $\overrightarrow{n_1}\ et\ \overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et P_1 et P_2 sont sécants.

b) (2) : x = 2y + z – 3 (4)

Dans (1) : 4y + 2z – 6 – 5y + 3z = 0 ⇔ y = 5z – 6

Dans (4) : x = 10z – 12 + z – 3 = 11z – 15

3 Donc d $\begin{cases} x = 11t - 15 \\ y = 5t - 6 \quad ,t \text{ réel} \\ z = t \end{cases}$

c) A(-15; -6; 0) ∈ d. A ∈ P_3 ?

15 – 18 + 3 = 0 ⟹ A ∈ P_3

$\overrightarrow{v_d}(11; 5; 1)$ est un vecteur directeur de d et $\overrightarrow{n_3}(-1;\ 3; -4)$ un vecteur normal de P_3,

4 $\overrightarrow{v_d} \cdot \overrightarrow{n_3}$ = -11 + 15 – 4 = 0 ⟹ d ∥ P_3.

Donc d est inclus dans P_3.

1,5 d) La droite d représente l'ensemble des solutions de (S).

e) Q : -x + 3y – 4z + 2 = 0 est strictement parallèle à P_3. Donc d et Q sont disjoints et (S) n'admet

2,5 alors aucune solution

VI. a) 2·3 – 4·2 – 4 = -6 ≠ -2. Donc A ∉ P.

1

b) Considérons la droite d ⊥ P et passant par A. d $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 4t, t \text{ réel} \\ z = -4 + t \end{cases}$

Soit A' le point d'intersection entre d et P.

6 + 4t – 8 + 16t – 4 + t = -2 ⇔ 21t = 4 ⇔ t = $\frac{4}{21}$.

Donc A'$\left(\frac{71}{21}; \frac{26}{21}; -\frac{80}{21}\right)$.

5 $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{8}{21}; -\frac{16}{21}; \frac{4}{21}\right)$ et AA' = $\sqrt{\frac{64+256+16}{21 \cdot 21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$.

2 c) $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = \frac{16}{21}$

d) $(\frac{55}{21} - 3)^2 + (\frac{58}{21} - 2)^2 + (-\frac{88}{21} + 4)^2 = (-\frac{8}{21})^2 + (\frac{16}{21})^2 + (-\frac{4}{21})^2 = \frac{64}{441} + \frac{256}{441} + \frac{16}{441} = \frac{336}{441} = \frac{16}{21}$

⟹ B ∈ S

$\overrightarrow{AB}(-\frac{8}{21}; \frac{16}{21}; -\frac{4}{21})$ et $\overrightarrow{n_Q}$ (-2 ; 4 ; -1) est un vecteur normal de Q.

4 Donc Q : -2x + 4y – z + d = 0

B ∈ Q : -2·$\frac{55}{21}$ + 4·$\frac{58}{21}$ + $\frac{88}{21}$ + d = 0 ⟹ d = -10

Donc Q : -2x + 4y – z – 10 = 0

1 e) Q est parallèle à P,car $\overrightarrow{n_Q}$ (-2 ; 4 ; -1) = -$\overrightarrow{n_P}$ (2 ; -4 ; 1)

VII. a) $\overrightarrow{AB}(3; -2; -3)$, $\overrightarrow{BC}(-1; -1; 6)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -3; 3)$

2 AB = $\sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$ BC = $\sqrt{1+1+36} = \sqrt{38}$ AC = $\sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

Le triangle ABC est isocèle.

b) $\widehat{BAC} = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}\right) = cos^{-1}\left(\frac{6+6-9}{22}\right) = cos^{-1}\left(\frac{3}{22}\right) \approx 82{,}16°$.

4 $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} \approx (180° - 82{,}16°) : 2 = 48{,}92°$.
