

CORRIGÉ :

MATHÉMATIQUES II
GE

Repêchage
10.6.2013

Question 1

Voir manuel page 350

QUESTION 2

$$\begin{aligned} 1) z_1 &= -\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} \\ &= e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) z &= \frac{(z_1)^4}{z_2} \\ &= \frac{4e^{-i\frac{5\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{6}}} \\ &= 4e^{-i\left(\frac{8\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} \\ &= 4e^{-i\frac{7\pi}{2}} \\ &= 4e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$(z_1)^4 = (\sqrt{2} e^{-i\frac{2\pi}{3}})^4 = 4e^{-i\frac{8\pi}{3}}$$

$$3) (\bar{z})^3 = (4e^{-i\frac{\pi}{2}})^3 = 64e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i$$

QUESTION 3

$$P(z) = z^3 - (2+5i)z^2 + 5(1+2i)z - 25i \quad (1)$$

$$1) P(z) = (z^2 + az + b)(z - 5i)$$

$$= z^3 + az^2 + bz - 5iz^2 - 5aiz - 5bi$$

En comparant (1) et (2) :



$$\begin{cases} a-5i = -2-5i \\ b-5ai = 5+10i \\ -5bi = -25i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-5i = -2-5i \text{ vrai.} \\ a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

donc $a = -2$ et $b = 5$.

Ainsi : $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z - 5i)$

2) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 5 = 0$ ou $z - 5i = 0$

$$\Delta = 4 - 20 = -16$$

$$z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$z_2 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1+2i$ ou $z = 1-2i$ ou $z = 5i$

$$S = \{1+2i; 1-2i; 5i\}$$

QUESTION 4

1) $|5-iz| = |\bar{z}-2+i|$

$\Leftrightarrow |-i(5i+z)| = |\bar{z}-2-i|$

$\Leftrightarrow \underbrace{|-i|}_{=1} \cdot |5i+z| = |\bar{z}-2-i|$

$\Leftrightarrow |z-(-5i)| = |z-(2+i)|$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

avec $A(-5i)$ et $B(2+i)$

2) $\arg(3-i-z) = \frac{5\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg[-(-3+i+z)] = \frac{5\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg(z-3+i) + \pi = \frac{5\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg(z-(3-i)) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$



L'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine $C(3-i)$ dirigée par un vecteur directeur \vec{w} tel que $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{2\pi}{3}$.

QUESTION 5

$$AB = 2a \quad I = \text{mil} [AB] \quad AI = BI = \frac{1}{2} AB = a$$

$$BC = GC = a \quad J = \text{mil} [GC] \quad GJ = JC = \frac{1}{2} GC = \frac{1}{2} a$$

1) $\vec{AI} \cdot \vec{AE} = 0$, car le triangle EAI est rectangle en A .

$$\vec{IE} \cdot \vec{IA} = \vec{IA} \cdot \vec{IA}, \text{ car } A \text{ est le projeté orthogonal de } E \text{ sur } (IA)$$

$$= IA^2$$

$$= a^2$$

$$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = (\vec{JG} + \vec{GH}) \cdot (\vec{JC} + \vec{CD})$$

$$= \vec{JG} \cdot \vec{JC} + \vec{JG} \cdot \vec{CD} + \vec{GH} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD}$$

$$= -\vec{JG} \cdot \vec{JG} + 0 + 0 + \vec{GH} \cdot \vec{GH}$$

$$= -JG^2 + GH^2$$

$$= -\frac{1}{4}a^2 + 4a^2$$

$$= \frac{15}{4}a^2$$

2) $\vec{JD} \cdot \vec{JH} = \|\vec{JD}\| \cdot \|\vec{JH}\| \cdot \cos \widehat{DJH}$

$$\Leftrightarrow \vec{JH} \cdot \vec{JD} = JD \cdot JH \cdot \cos \widehat{DJH}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{DJH} = \frac{\vec{JH} \cdot \vec{JD}}{JD \cdot JH}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{DJH} = \frac{\frac{15}{4}a^2}{JD^2}$$

Le triangle JCD est rectangle en C ; d'après Pythagore :

$$JD^2 = JC^2 + CD^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4a^2 = \frac{17}{4}a^2$$

d'où : $\cos \widehat{DJH} = \frac{\frac{15}{4}a^2}{\frac{17}{4}a^2} = \frac{15}{17}$

donc : $\widehat{DJH} \approx 28,1^\circ$.



QUESTION 6

$$A(-2; 3; -5) \quad B(2; 0; 3) \quad C(3; 6; 5) \quad D(-1; 2; -3) \quad E(-5; 2; -1)$$

$$1) \vec{AB}(4; -3; 8) \quad \vec{AC}(5; 3; 10)$$

Comme il n'existe aucun réel k tel que $\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$, \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires et ainsi A, B et C non alignés.

$$2) \vec{DE}(-4; 0; 2)$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{AB} = -4 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 8 = -16 + 16 = 0 \Rightarrow \vec{DE} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{AC} = -4 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 10 = -20 + 20 = 0 \Rightarrow \vec{DE} \perp \vec{AC}$$

Comme \vec{DE} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) , \vec{DE} est normal à (ABC) .

$$3) M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \perp \vec{DE}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{DE} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot (-4) + (y-3) \cdot 0 + (z+5) \cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - z - 1 = 0$$

$$4) \text{ Soit } \{K\} = (DE) \cap (O; \vec{i}; \vec{j})$$

Le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ a pour équation $z=0$.

(DE) a pour vecteur directeur \vec{DE} et passe par D

Représentation paramétrique de (DE) :

$$\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 2 \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



Les coordonnées de K vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 2 \\ z = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 2 \\ t = \frac{3}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$K(-7; 2; 0)$.

QUESTION 7

1. a) P_1 a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1; -1; 3)$

P_2 a pour vecteur normal $\vec{n}_2(-3; 2; 1)$

Comme il n'existe aucun réel k tel que $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$, \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires et ainsi P_1 et P_2 sont sécants.

$$b) \begin{cases} x - y + 3z = -1 & (1) \\ -3x + 2y + z = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(1): x - y + 3z = -1 \Leftrightarrow x = y - 3z - 1$$

En remplaçant x par $y - 3z - 1$ dans (2) :

$$-3y + 9z + 3 + 2y + z = 4 \Leftrightarrow -y + 10z = 1 \Leftrightarrow y = 10z - 1$$

$$(1): x = 10z - 1 - 3z - 1 = 7z - 2$$

$$\text{on a : } \begin{cases} x = 7z - 2 \\ y = 10z - 1 \end{cases}$$

z peut prendre toute valeur de \mathbb{R} . On pose $z = t$.

Représentation paramétrique de d :

$$d: \begin{cases} x = 7t - 2 \\ y = 10t - 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



$$d = (A; \vec{u}) \text{ avec } A(-2; -1; 0) \text{ et } \vec{u}(7; 10; 1)$$

2) Soit $M \in d$. Alors les coordonnées de M vérifient:

$$\begin{cases} x = 7t - 2 \\ y = 10t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$M \in \mathcal{P}_3 \Leftrightarrow 2 \cdot (7t - 2) - (10t - 1) - 4t = -3$$

$$\Leftrightarrow 14t - 4 - 10t + 1 - 4t = -3$$

$$\Leftrightarrow -3 = -3 \text{ vrai}$$

donc $M \in \mathcal{P}_3$. Ainsi $d \subset \mathcal{P}_3$.

3) D'après 1) $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = d$

D'après 2) $d \subset \mathcal{P}_3$.

Donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = d$.

$$S = \{ (7t - 2; 10t - 1; t), t \in \mathbb{R} \}$$

