I

1) * $z_1 = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

* $z_2 = \dfrac{i\left(-2-2i\sqrt{3}\right)}{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(-2-2i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{-2i+2\sqrt{3}}{4+12} = \dfrac{2\sqrt{3}}{16}-\dfrac{2}{16}i = \dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{1}{8}i$

* $z_1 = (-1)e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

* $|z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{64}+\frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\vartheta = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

donc $z_2 = \frac{1}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

2) $$\frac{z_1^6}{z_2} = \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^6}{\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{6}}} = 4\,e^{i\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)} = 4\,e^{i\frac{23\pi}{6}} = 4\left(\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 4\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

((3+4) + 2 = 9 pts)

II $P(z) = z^3+(-2-5i)\,z^2+(10+10i)\,z-50i$

1) * $P(5i) = (5i)^3+(-2-5i)(5i)^2+(10+10i)(5i)-50i$

$= -125i+50+125i+50i-50-50i = 0$, donc $(5i)$ est solution de (E).

* $(z-5i)\left(az^2+bz+c\right) = az^3+bz^2+cz-5aiz^2-5biz-5ci$

$= az^3+(b-5ai)z^2+(c-5bi)z-5ci$

$\forall z\in\mathbb{C},\ z^3+(-2-5i)z^2+(10+10i)z-50i = az^3+(b-5ai)z^2+(c-5bi)z-5ci$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 & (1)\\ b-5ai = -2-5i & (2)\\ c-5bi = 10+10i & (3)\\ -5c = -50 & (4) \Leftrightarrow c=10\end{cases}$$

(1) dans (2) : $b-5i = -2-5i \Leftrightarrow b=-2$

Vérifions dans (3) : $10+10i = 10+10i$

(E) se note : $(z-5i)\left(z^2-2z+10\right)=0$

2) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=5i$ ou $z^2-2z+10=0$ $\Delta = -36$

$\Leftrightarrow z=5i$ ou $z=\dfrac{2-i\sqrt{36}}{2}$ ou $z=\dfrac{2+i\sqrt{36}}{2}$

$S_{\mathbb{C}} = \{5i;1-3i;1+3i\}$ **((2+3) + 2 = 7 pts)**

Corrigé

III 1) $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{3i-2-i}{4+3i-2-i}\right) = \arg\left(\dfrac{-2+2i}{2+2i}\right)$

$$= \arg\left[\left(\frac{-2+2i}{2+2i}\right)\left(\frac{2-2i}{2-2i}\right)\right] = \arg\left(\frac{-4+4i+4i+4}{4+4}\right) = \arg\left(\frac{8i}{8}\right)$$

$$= \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

2) Soit $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. D'après 1) $\begin{cases} |Z| = \dfrac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = |i| = 1 \\ \arg Z = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} \dfrac{BA}{BC} = 1 \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Comme $BA = BC$ et comme $(BC) \perp (BA)$, le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

(3 + 3 = 6 pts)

IV 1) $z \neq 2i$.

$$z' = \frac{z-3}{z-2i} = \frac{(x+iy)-3}{(x+iy)-2i} = \frac{[x-3+iy][x-i(y-2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]}$$

$$= \frac{x^2 - ix(y-2) - 3x + i3(y-2) + ixy + y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x^2+y^2-3x-2y+i(2x+3y-6)}{x^2+(y-2)^2}$$

$x' = \dfrac{x^2+y^2-3x-2y}{x^2+(y-2)^2}$ et $y' = \dfrac{2x+3y-6}{x^2+(y-2)^2}$

2) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \end{cases}$

L'ensemble D est la droite d'équation $2x+3y-6=0$ privé du point $(0;2)$.

3) (z' imaginaire pur) $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-3x-2y=0 \\ x^2+(y-2)^2 \neq 0 \end{cases}$

$$x^2+y^2-3x-2y=0 \Leftrightarrow x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2-2y+1-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$$

L'ensemble Γ est le cercle de centre $\left(\dfrac{3}{2};1\right)$, de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, privé du point $(0;2)$.

(4 + 2 + 4 = 10 pts)

Corrigé

V 1) Voir manuel p.384 Théorème 6 1).

2) a) $\overrightarrow{AB}(-2;3;19)$; $\vec{n}(3;-1;-2)$ est un vecteur normal à P.

(AB) est perpendiculaire à P $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 \text{ tel que } \overrightarrow{AB} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 3k \Rightarrow k = -\dfrac{2}{3} \\ 3 = -k \Rightarrow k = -3 \\ 19 = -2k \Rightarrow k = -\dfrac{19}{2} \end{cases} \quad \text{impossible !}$$

Donc (AB) n'est pas perpendiculaire à P.

b) Un vecteur normal à P est normal à Q.
Équation de Q : $3x - y - 2z + d = 0$
$A \in Q$, d'où : $3 \cdot 3 - (-2) - 2 \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow 9 + 2 - 8 + d = 0 \Rightarrow d = -3$
Une équation de Q est : $3x - y - 2z - 3 = 0$.

c) $\vec{n_1}(-5;3;-9)$ est un vecteur normal à R.
$\vec{n}$ et $\vec{n_1}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_0 \text{ tel que } \vec{n} = k\vec{n_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -5k \Rightarrow k = -\dfrac{3}{5} \\ -1 = 3k \Rightarrow k = -\dfrac{1}{3} \\ -2 = -9k \Rightarrow k = \dfrac{2}{9} \end{cases} \quad \text{impossible !}$$

Il suit : $\vec{n}$ et $\vec{n_1}$ ne sont pas colinéaires, donc les plans P et R ne sont pas parallèles, mais ils sont sécants.
Comme $\vec{n} \cdot \vec{n_1} = 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot (-9) = 0$, $\vec{n}$ et $\vec{n_1}$ sont orthogonaux et les plans P et R sont donc perpendiculaires.

(5 + 2 + 2 + 2 = 11 pts)

VI 1) Centre $\Omega\left(\dfrac{-3+7}{2};\dfrac{5-1}{2};\dfrac{2+4}{2}\right) = \Omega(2;2;3)$

Rayon : $\Omega A = \sqrt{(-3-2)^2 + (5-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$

$M(x;y;z) \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 35$ (Éq. de la sphère)

2) $A \in P$ et $A \in S$.
Le plan tangent en A à S est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0$
$\overrightarrow{AM}(x+3;y-5;z-2)$; $\overrightarrow{\Omega A}(-3-2;5-2;2-3) = \overrightarrow{\Omega A}(-5;3;-1)$
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot (-5) + (y-5) \cdot 3 + (z-2) \cdot (-1) = 0$
$\Leftrightarrow -5x + 3y - z - 28 = 0$ (Éq. du plan P)

(3 + 3 = 6 pts)

Corrigé

VII 1) $P_1 : 3x-2y+z-7=0$ $\overrightarrow{n_1}(3;-2;1)$ est un vecteur normal à P_1.

$P_2 : 2x+2y-z+2=0$ $\overrightarrow{n_2}(2;2;-1)$ est un vecteur normal à P_2.

$\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1}$

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite d.

2) $M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 3x-2y+z-7=0 \\ 2x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

Méthode par substitution :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ 2\left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{7}{3}\right) + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{14}{3} + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3}y - \frac{5}{3}z + \frac{20}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ 10y - 5z + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{2}z - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}z - 2, \end{cases} \text{avec } z \in \mathbb{R}$$

Représentation paramétrique de d : $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}t - 2, \; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

3) Un vecteur directeur de d : $\vec{u}\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$

Un vecteur normal à P_3 : $\vec{n}(4;-1;2)$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 1{,}5 \neq 0$, donc $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$ et d coupe P_3 en un point I.

Les coordonnées de I doivent vérifier le système

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}t - 2 \\ z = t \\ 4x - y + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}t - 2 \\ z = t \\ 4 - \left(\frac{1}{2}t - 2\right) + 2t = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

d coupe P_3 en $I(1;-1;2)$.

(2 + 4 + 5 = 11 pts)