I.

4+6 = 10 points

Question de cours voir livre: théorème 3 page 350 et théorème 6 page 200.

II.

7+1+3 = 11 points

a) • $z_1 = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$ ▪ Forme algébrique de z_1 : $z_1 = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} \cdot \frac{i+\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{(i+\sqrt{3})^2}{i^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{-1+2i\sqrt{3}+3}{-4} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{-4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

▪ Forme exponentielle de z_1 : $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

Soit $\theta_1 = \arg(z_1)$.

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

$$z_1 = 1 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

• $z_2 = 2ie^{i\frac{3\pi}{4}}$ ▪ Forme exponentielle de z_2 : $z_2 = 2ie^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

▪ Forme algébrique de z_2 : $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

b) $(z_1)^3 = \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{-i2\pi} = 1$.

c) $\overline{z_1} \cdot z_2$ ▪ Forme exponentielle : $\overline{z_1} \cdot z_2 = \overline{\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)} \cdot 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2 \cdot e^{i\frac{23\pi}{12}} = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

▪ Forme algébrique : $\overline{z_1} \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} - i^2\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

III.

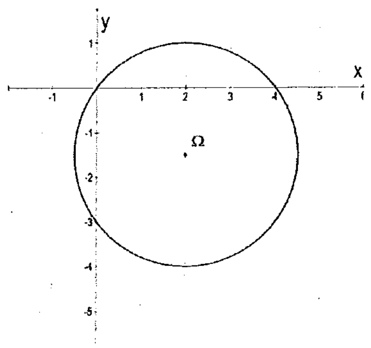
5 points

Soit z = x + iy (avec x, y ∈ IR).

$$\begin{aligned} z' = \overline{(z+3i)}(z-4) &= \overline{(x+iy+3i)}(x+iy-4) \\ &= (x-iy-3i)(x+iy-4) \\ &= x^2 + ixy - 4x - ixy + y^2 + 4iy - 3ix + 3y + 12i \\ &= (x^2 - 4x + y^2 + 3y) + i(4y - 3x + 12) \end{aligned}$$

Donc $\text{Re}(z') = x^2 - 4x + y^2 + 3y$ et $\text{Im}(z') = 4y - 3x + 12$

$$\begin{aligned} z' \text{ est imaginaire pur} &\Leftrightarrow \text{Re}(z') = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 = 4 + \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y + \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{25}{4} \end{aligned}$$



L'ensemble des points M(z) tels que z' est imaginaire pur est le cercle de centre $\Omega(2\ ;\ -\frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

IV.

2+1+2 = 5 points

a) $AB = |b-a| = |1+i-5-3i| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$BC = |c-b| = |-1-3i-1-i| = |-2-4i| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Comme AB = BC, le triangle ABC est isocèle.

b) $e = \frac{a+c}{2} = \frac{5+3i-1-3i}{2} = 2$.

c) Comme AB = BC, il suffit de déterminer D tel que E est aussi le milieu de [BD].

Ainsi $e = \frac{b+d}{2} \Leftrightarrow d = 2e - b \Leftrightarrow d = 2\cdot 2 - (1+i) \Leftrightarrow d = 3 - i$.

V.

1+4+4 = 9 p

a) La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strict. positive sur $]1\,;+\infty[$ donc F est aussi dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et $\forall\, x \in\,]1\,;+\infty[$, $F'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$, $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{x(a+b)+(a-b)}{x^2-1}$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

$$\begin{aligned} I = \int_2^3 \frac{2}{x^2-1}dx &= \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_2^3 \\ &= \left[\ln(x-1) - \ln(x+1)\right]_2^3 \\ &= [\ln(2) - \ln(4)] - [\ln(1) - \ln(3)] \\ &= \ln 3 - \ln 2 \end{aligned}$$

c) $J = \int_2^3 \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}dx$ intégration par parties : $u(x) = \ln(x^2-1)$ $v'(x) = \frac{1}{x^2}$

$u'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ $v(x) = -\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} J = \left[-\tfrac{1}{x}\cdot\ln(x^2-1)\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x}dx &= \left[-\tfrac{1}{3}\cdot\ln(8) + \tfrac{1}{2}\ln(3)\right] + I \\ &= -\ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln 3 + \ln 3 - \ln 2 \\ &= \tfrac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

VI.

3+4+4 = 11 points

a) $I=\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}=\int_1^2 -\frac{1}{2}\frac{-2x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}=\left[-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5-x^2}\right]_1^2=-\sqrt{1}+\sqrt{4}=1.$

b) $J=\int_1^e (t-1)\ln t \; dt$ intégration par parties : $u(t)=\ln(t)$ $v'(t)=t-1$

$u'(t)=\frac{1}{t}$ $v(x)=\frac{1}{2}t^2-t$

$$J=\left[\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\cdot\ln t\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}t-1\right)dt$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}e^2-e\right)\cdot 1-0\right]-\left[\frac{1}{4}t^2-t\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-e-\left(\frac{1}{4}e^2-e-\frac{1}{4}+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}.$$

c) $K=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+1}{\cos^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\left[\frac{1}{\cos x}+\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=2+\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=2.$$

VII.

3+3+3 = 9 points

a) $\overrightarrow{AB}(2\,;-4\,;-3)$; $AB=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$.

$\vec{u}\cdot(\vec{u}-2\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(1^2+(-1)^2+2^2\right)-2(1\cdot 2-1\cdot 1+2\cdot 0)=4.$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=2\cdot 1+(-4)\cdot(-1)+(-3)\cdot 2=0.$ Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=2\cdot 2+(-4)\cdot 1+(-3)\cdot 0=0.$ Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P, donc (AB) est perpendiculaire à P.

c) $A\in P$ et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à P.

$M(x\,;y\,;z)\in P \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\iff (x-3)\cdot 2+(y-1)\cdot(-4)+(z+1)\cdot(-3)=0$

$\iff 2x-4y-3z-5=0$