Section Cg
2e session
19 septembre 2011

Corrigé – Mathématiques II

Question 1 **(5 + 5 = 10 points)**

a) voir livre page 204 ; b) voir livre page 382

Question 2 **(4 + 4 + 2 = 10 points)**

a) $$z_1 = \frac{-3\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2+i} = \frac{\left(-3\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)(2-i)}{4+1} = \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{5} = \frac{-5\sqrt{3}+5\sqrt{3}i}{5} = -\sqrt{3}+\sqrt{3}i$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{3+1} = \frac{-3+\sqrt{3}i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

b) $z_1 = -\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

$|z_1| = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta_1 = \dfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$

donc $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = \sqrt{3}+i$

$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta_2 = \dfrac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$

donc $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$Z = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{9\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

c) $$Z = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\frac{7\pi}{12}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\frac{7\pi}{12} \text{ et } Z = \frac{\sqrt{3}-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-3}{4} \\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{2\left(\sqrt{3}-3\right)}{4\sqrt{6}} \\ \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{2\left(\sqrt{3}+3\right)}{4\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{18}-3\sqrt{6}}{2\cdot 6} \\ \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{18}+3\sqrt{6}}{2\cdot 6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Question 3 **((3 + 3) + 3 = 9 points)**

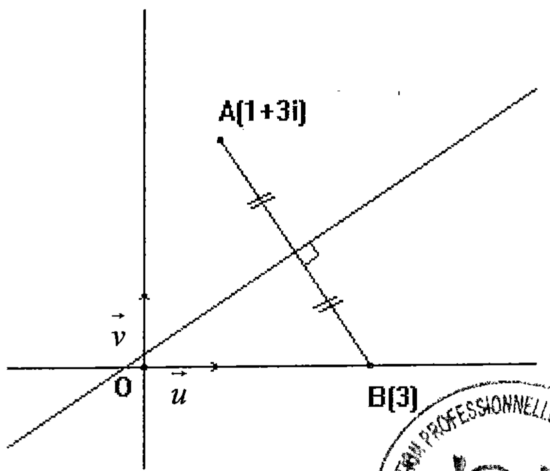
a) 1) $\left|\bar{z}-1+3i\right| = |3-z|$

$\Leftrightarrow \left|\overline{\bar{z}-1+3i}\right| = |z-3|$

$\Leftrightarrow |z-1-3i| = |z-3|$

$\Leftrightarrow |z-(1+3i)| = |z-3|$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB] avec $A(1+3i)$ et $B(3)$



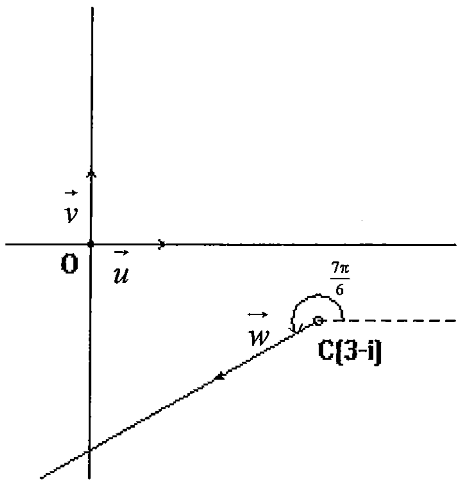
2) $\arg\left(3+i-\bar{z}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad \arg\left(\overline{3+i-\bar{z}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad \arg\left(3-i-z\right)=\dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad \arg\left(-3+i+z\right)=\dfrac{\pi}{6}+\pi$

$\Leftrightarrow \quad \arg\left(z-(3-i)\right)=\dfrac{7\pi}{6}$



L'ensemble cherché est la demi-droite ouverte d'origine $C(3-i)$ dirigée par un vecteur $\vec{w}$ tel que $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$

b) $\left|\bar{z}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{3}$ avec $z=x+iy\,;\ x,y\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \left|x-iy+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \left|x+\dfrac{3}{4}+i\left(-y-\dfrac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad \left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(-y-\dfrac{1}{2}\right)^2=3 \Leftrightarrow \left[x-\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A\left(-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

<u>Question 4</u> **(4 + 3 = 7 points)**

a) *f* est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)=\sin^3 x=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)=\sin x+\cos^2 x\cdot(-\sin x)$

Les primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions *F* définies par : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x+k$

$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow -\cos\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^3+k=-\dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+k=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{8}+k=-\dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow -\dfrac{4\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}+k=-\dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow k=\dfrac{2\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow k=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

La primitive *F* de *f* sur $\mathbb{R}$ telle que $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ est définie par $\underline{F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

b) *f* est continue sur I et $\forall x\in$ I, on a : $f(x)=-\dfrac{1}{6}e^{-3x^2}\cdot(-6x)+8\cdot\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$

Une primitive de *f* sur I est la fonction *F* définie par : $\forall x\in$ I, $\underline{F(x)=-\dfrac{1}{6}e^{-3x^2}+8\sqrt{x^2-5x}}$

Question 5 **(2 + 2,5 + 3,5 = 8 points)**

a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a: $\dfrac{4}{x(x^2+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{x(x^2+2)} = \dfrac{ax^2+2a+bx^2+cx}{x(x^2+2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a+b \\ 0 = c \\ 4 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = -2 \\ c = 0 \\ a = 2 \end{cases}}$

b) $\mathrm{I} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{4}{x(x^2+2)}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^2+2}\right)dx = \left[2\ln|x| - \ln|x^2+2|\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(2\ln|1| - \ln|1+2|\right) - \left(2\ln\left|\dfrac{1}{2}\right| - \ln\left|\dfrac{1}{4}+2\right|\right)$

$= 2\ln 1 - \ln 3 - 2\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{9}{4} = -\ln 3 + 2\ln 2 + \ln 9 - \ln 4 = -\ln 3 + 2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 = \underline{\ln 3}$

c) $\mathrm{J} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{x\ln x}{(x^2+2)^2}dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\dfrac{x}{(x^2+2)^2}\cdot \ln x\right]dx$ Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{x}{(x^2+2)^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}\right) & v(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+2} \end{cases}$

$= \left[-\dfrac{1}{2(x^2+2)}\cdot \ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[-\dfrac{1}{2x(x^2+2)}\right]\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2\cdot(1+2)}\cdot\ln 1 + \dfrac{1}{2\cdot\left(\dfrac{1}{4}+2\right)}\cdot\ln\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{4}{x(x^2+2)}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2\cdot\dfrac{9}{4}}\cdot(-\ln 2) + \dfrac{1}{8}\mathrm{I} = -\dfrac{\ln 2}{\dfrac{9}{2}} + \dfrac{1}{8}\mathrm{I} = \underline{-\dfrac{2}{9}\ln 2 + \dfrac{1}{8}\mathrm{I}}$

Donc $\underline{\mathrm{J} = -\dfrac{2}{9}\ln 2 + \dfrac{1}{8}\ln 3}$

Question 6 **(5 points)**

$\mathcal{A} = -\int_{1}^{1,5} \ln\left(\dfrac{2-x}{x}\right)dx$ Posons :

$$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x}\right) & u'(x) = \dfrac{\dfrac{-x-(2-x)\cdot 1}{x^2}}{\dfrac{2-x}{x}} = \dfrac{-x-2+x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{2-x} = \dfrac{-2}{x(2-x)} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$$

$= -\left[x\ln\left(\dfrac{2-x}{x}\right)\right]_{1}^{1,5} + \int_{1}^{1,5}\dfrac{-2x}{x(2-x)}\mathrm{d}x = -\left[1,5\cdot\ln\dfrac{0,5}{1,5} - 1\cdot\ln\dfrac{1}{1}\right] + \int_{1}^{1,5}\dfrac{-2}{2-x}\mathrm{d}x$

$= -1,5\ln\dfrac{1}{3} + \left[2\ln|2-x|\right]_{1}^{1,5}$

$= 1,5\ln 3 + 2\ln\dfrac{1}{2} - 2\ln 1$

$= \underline{\dfrac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 \text{ u.a.}}$

Question 7 **(2 + 3 + 3 + 3 = 11 points)**

a) $\overrightarrow{AB}(-5;5;-5)$; $\overrightarrow{AC}(-3;4;-1)$. Comme il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = -15 + 10 + 5 = 0$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AC} = -9 + 8 + 1 = 0$ donc $\vec{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

$\vec{v}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{v}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Une équation du plan (ABC) est de la forme $3x + 2y - z + d = 0$

$A \in (ABC) \Rightarrow 3 - 4 - 2 + d = 0 \Rightarrow -3 + d = 0 \Rightarrow d = 3$

Une équation du plan (ABC) est donc $\underline{3x + 2y - z + 3 = 0}$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \cos \widehat{ABC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BA}(5;-5;5)$; $\overrightarrow{BC}(2;-1;4)$

$\Leftrightarrow 10 + 5 + 20 = \sqrt{25 + 25 + 25} \cdot \sqrt{4 + 1 + 16} \cdot \cos \widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow 35 = \sqrt{75} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos \widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow 35 = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos \widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow 35 = 15\sqrt{7} \cdot \cos \widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \dfrac{35}{15\sqrt{7}}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \dfrac{7\sqrt{7}}{3 \cdot 7}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

donc $\widehat{ABC} \approx \underline{28{,}13°}$

d) Soit M = mil[BC]. On a : $M\left(-3;\dfrac{5}{2};-1\right)$.

$\overrightarrow{BC}(2;-1;4)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc une équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme $2x - y + 4z + d = 0$.

$M \in \mathcal{P} \Rightarrow -6 - \dfrac{5}{2} - 4 + d = 0 \Rightarrow -\dfrac{25}{2} + d = 0 \Rightarrow d = \dfrac{25}{2}$

Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $2x - y + 4z + \dfrac{25}{2} = 0$, ou encore $4x - 2y + 8z + 25 = 0$