

Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2005

BRANCHE : MATHÉMATIQUES II

DATE : 07/06/05

DURÉE : 2 h 15

QUESTION 1 (2+4+4=10 points)

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

a) Démontrer que pour tout entier n non nul, $u_n > 0$.

b) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) . En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

QUESTION 2 (4+4+5=13 points)

a) Soit $(O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal du plan. En posant $z = x + iy$ avec x et y réels, déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ dont l'affixe vérifie la condition :

$$(\bar{z} - 3) \cdot (iz + 2) \text{ est réel.}$$

b) Écrire le nombre complexe $z_1 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sous forme exponentielle.

c) Linéariser l'expression : $\cos^3 x \sin x$.

QUESTION 3 (3+2+2+2=9 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et C

d'affixes respectives $z_A = 1 + \frac{3}{4}i$, $z_B = 2 - \frac{5}{4}i$ et $z_C = 3 + \frac{7}{4}i$.

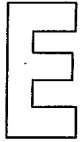
a) Placer les points A , B et C . Calculer les affixes des vecteurs \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{BC} .

b) En déduire les longueurs AB , AC et BC .

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

d) Calculer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC .





Ministère de l'Éducation Nationale et de la Formation Professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2005

QUESTION 4 (4 points)

Démontrer le théorème :

A, B, C, D sont des points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D , tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

Alors :
$$\left(\overline{AB}, \overline{CD} \right) = \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right)$$

QUESTION 5 (7+7=14 points)

a) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$.

Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$ où a, b, c sont des nombres réels.

Calculer $\int_1^4 f(x) dx$.

b) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x) dx \quad (\text{Suggestion : faire une double intégration par parties})$$

QUESTION 6 (7 points)

Démontrer le théorème suivant :

Dans un repère orthonormal, tout plan P a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c ne sont pas tous nuls. De plus, le vecteur non nul $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à P .

QUESTION 7 (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(-2; 3; -1)$ et $B(3; 0; -2)$ et le vecteur $\vec{n}(2; -1; 5)$.

Soit P le plan passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} . Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par B et parallèle au plan P .

