

**Exercice I (10 (6+4) points)**

Démontrez:

1.  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a$  est un réel de  $I$ .

Alors la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(a) = 0$ .

2. Quels que soient les nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$ :

1.  $|zz'| = |z| \cdot |z'|$     et    2.  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$

**Exercice II (12 (3+2+4+3) points)**

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont les suites définies pour tout entier naturel  $n$  par:

$$u_0 = -1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \text{ et } v_n = 2 - u_n.$$

- Démontrez que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.
- Calculez  $v_n$ , puis  $u_n$ , en fonction de  $n$ .
- On note  $S_n = u_0 + \dots + u_n$ . Calculez  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- Déduisez-en  $S_5$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Exercice III (8 (4+2+2) points)**

Les points  $A, B, C$  ont pour affixes respectives:

$$a = \frac{2}{5} + i, \quad b = -\frac{8}{5} + 2i, \quad c = -\frac{3}{5} - i.$$

- Placez les points  $A, B$  et  $C$ . Quelle est la relation qui lie les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ?
- Déduisez-en que  $ABC$  est un triangle rectangle isocèle.
- Calculez l'affixe de  $D$  tel que  $ABDC$  est un carré.

**Exercice IV (10 (3+3+2+2) points)**

Soit  $z = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ .

1. Démontrez que  $z^2 = 8\sqrt{3} + 8i$ .
2. Déterminez le module et un argument de  $z^2$ .
3. Déduisez-en le module et un argument de  $z$ .
4. Trouvez les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

**Exercice V (7 (3+4) points)**

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -\frac{2x^3 + x^2 - 9x - 7}{(x+1)^2}$ .

1. Déterminez les réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$ .
2. Calculez  $\int_1^3 f(x) dx$ .

**Exercice VI (13 (3+3+7) points)**

Calculez les intégrales suivantes:

1.  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$
2.  $\int_1^e \frac{4 \ln t}{t} dt$
3.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x dx$  (Aide: Faites une double intégration par parties)