Corrigé

I. *(8 points)*

4 p.

1) $f(x)=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\dfrac{e^{i4x}-4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-i2x}-4e^{ix}e^{-i3x}+e^{-i4x}}{16}$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}-4\cdot\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}+\frac{6}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot(\cos 4x-4\cos 2x+3)$$

$$=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}$$

4 p.

2) $\forall x\in\mathbb{R}:\ F(x)=\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x+c,\ c\in\mathbb{R}$

$$F(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{4}\ \Leftrightarrow\ 0-\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{32}+c=-\frac{1}{4}\ \Leftrightarrow\ c=-\frac{3\pi}{32}$$

Donc : $F(x)=\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x-\frac{3\pi}{32}$

II. *(12 points)*

5 p.

1) voir cours.

7 p.

2) $|z|=\sqrt{3+1}=2$; $|z'|=4\sqrt{1+1}=4\sqrt{2}$; $|u|=|zz'|=|z||z'|=2\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow\ \theta=\arg z=\frac{5\pi}{6}\ (\bmod 2\pi)$

$\cos\theta'=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta'=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\Rightarrow\theta'=\arg z'=-\frac{\pi}{4}\ (\bmod 2\pi)$

$\arg u=\arg(zz')=\arg z+\arg z'=\frac{5\pi}{6}+(-\frac{\pi}{4})=\frac{7\pi}{12}\ (\bmod 2\pi)$

III. *(8 points)*

2 p.

1) $z=\dfrac{(-2-3i)^2(-4+5i+\frac{3}{2}+5i)}{5i}=\dfrac{(4+12i-9)(-\frac{5}{2}+10i)}{5i}$

$$=\frac{(-5+12i)\cdot 5(-\frac{1}{2}+2i)\cdot(-i)}{5i\cdot(-i)}$$

$$=(\frac{5}{2}-10i-6i-24)(-i)$$

$$=-16+\frac{43}{2}i$$

2) a) $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{-\frac{3}{2}-5i+2+3i}{-4+5i+2+3i}=\dfrac{\frac{1}{2}-2i}{-2+8i}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-4i)}{-2(1-4i)}=-\dfrac{1}{4}$

(4 p.)

Comme $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=\arg(-\dfrac{1}{4})=\pi \ (\bmod\ 2\pi)$, les points A, B et C sont alignés.

(2 p.) b) AOBD est un parallélogramme $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DB}\ \Leftrightarrow\ 0-a=b-d\ \Leftrightarrow\ d=b+a=-6+2i$

Donc : $D(-6+2i)$

6 p.

IV. *(8 points)*

1) $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$

4 p.

$\forall x\in\mathbb{R}:\ \dfrac{1}{2}f''(x)+f(x)=-e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\cos x-\sin x)=f'(x)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)=\dfrac{1}{2}f''(x)+f(x)\ \Leftrightarrow\ f(x)=f'(x)-\dfrac{1}{2}f''(x)$

Donc : $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\left(f'(x)-\frac{1}{2}f''(x)\right)dx$

$$=\left[f(x)-\frac{1}{2}f'(x)\right]_0^{\pi/2}$$

4 p.

$$=f(\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}f'(\frac{\pi}{2})-f(0)+\frac{1}{2}f'(0)$$

$$=0-\frac{1}{2}\cdot(-e^{\pi/2})-e^0+\frac{1}{2}e^0$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\pi/2}\quad(\approx 1{,}91)$$

V. *(8 points)*

5 p. 1) voir cours.

3 p. 2) $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[:\ G(x)=\displaystyle\int_{\pi/3}^{x}\tan t\,dt=\int_{\pi/3}^{x}\frac{\sin t}{\cos t}\,dt=\left[-\ln|\cos t|\right]_{\pi/3}^{x}=-\ln|\cos x|+\ln\frac{1}{2}$

VI. *(7 points)*

$\forall n\in\mathbb{N}:\ I_n=\displaystyle\int_1^e t^n\ln t\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{t}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\,dt$

$u(t)=\ln t\ \Rightarrow\ u'(t)=\dfrac{1}{t}$

$v'(t)=t^n\ \Rightarrow\ v(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_1^e-\frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_1^e$$

(6 p.)

$$=\frac{1}{n+1}\cdot(e^{n+1}-0)-\frac{1}{(n+1)^2}\cdot(e^{n+1}-1)$$

$$=\frac{(n+1)e^{n+1}-e^{n+1}+1}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{1+ne^{n+1}}{(n+1)^2}$$

(1 p.)

7 p.

$J=I_0=1 \quad ; \quad K=I_9=\frac{1+9e^{10}}{100} \ (\approx 1982{,}39)$

VII. *(9 points)*

1) $\vec{u}(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3})$, $\vec{v}(-\frac{\sqrt{2}}{6};-\frac{2\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{2}}{6})$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1 \quad ; \quad \|\vec{v}\|=\sqrt{\frac{2}{36}+\frac{8}{9}+\frac{2}{36}}=1$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

5 p.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{6})+\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2\sqrt{2}}{3})+(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{6})=\frac{2\sqrt{2}}{18}-\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{18}=0$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{6})-(-\frac{2\sqrt{2}}{3})\cdot(-\frac{2}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{18}-\frac{4\sqrt{2}}{9}=-\frac{9\sqrt{2}}{18}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{2}{3}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{6})-(-\frac{\sqrt{2}}{6})\cdot(-\frac{2}{3})=0\\ -\frac{2}{3}\cdot(-\frac{2\sqrt{2}}{3})-(-\frac{\sqrt{2}}{6})\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}+\frac{\sqrt{2}}{18}=\frac{9\sqrt{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \ \vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}\text{, avec } \vec{w}(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2})$$

4 p.

2) $\|\vec{a}\|=\sqrt{1+0+16}=\sqrt{17} \quad ; \quad \vec{u}\cdot\vec{a}=-\frac{2}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{3}\cdot 0+(-\frac{2}{3})\cdot 4=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-2$

$\vec{u}\cdot\vec{a}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{a}) \Leftrightarrow -2=1\cdot\sqrt{17}\cdot\cos(\vec{u},\vec{a}) \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{17}}=\cos(\vec{u},\vec{a}) \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{a})\approx 119{,}02°$
