Corrigé – Mathématiques I – Session 2015

Question I

Voir recueil officiel: théorèmes III.4 page 8 , III.6 page 8 et III.7 page 10.

Question II

a) x est le rayon du demi-disque (en cm) et $2x$ est la largeur du rectangle (en cm).
Soit y la longueur du rectangle (en cm).

$x \in \left]0;58\right[$

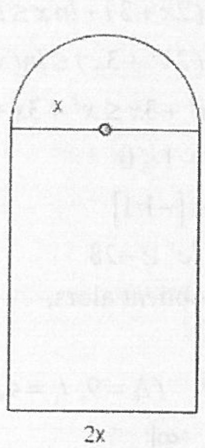
$A_{fenêtre} = A_{rectangle} + A_{demi-disque}$

$P_{fenêtre} = 2y + 2x + \pi x$

$\Leftrightarrow 300 = 2y + 2x + \pi x$

$\Leftrightarrow 300 - 2x - \pi x = 2y$

$\Leftrightarrow 150 - x - \frac{\pi}{2}x = y$



Ainsi,

$$A(x) = 2x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2}{2}$$

$$= 2x \cdot \left(150 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2$$

$$= 300x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2$$

$$= 300x - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)x^2$$

b) Soit A la fonction définie sur $\left]0;58\right[$ par $A(x) = 300x - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)x^2$.

Pour tout $x \in \left]0;58\right[$,

$$A'(x) = 300 - 2x\left(\frac{4+\pi}{2}\right)$$

$$= 300 - x(4+\pi)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 300 - x(4+\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 300 = x(4+\pi)$$

$$\Leftrightarrow x = \tfrac{300}{4+\pi} \qquad (\cong 42)$$

Tableau des variations

x	0		$\frac{300}{4+\pi}$		58
$A'(x)$	||	+	0	-	||
A	||	$\nearrow$	max	$\searrow$	||

L'aire de la fenêtre est maximale lorsque

$$x = \frac{300}{4+\pi} \text{ cm } \left(\text{et } y = 150 - \frac{300}{4+\pi} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{300}{4+\pi} = \frac{300}{4+\pi} \text{ cm} \right).$$

Question III

a) Conditions d'existence :

$$2x+3>0 \quad \text{et} \quad x^2+3x+1>0 \quad \text{et} \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x\in\left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[\quad \text{et} \quad x>0$$

$D=]0;+\infty[$

$\forall x\in]0;+\infty[: ln(2x+3)\leq ln(x^2+3x+1)-ln\,x$

$\Leftrightarrow ln(2x+3)+ln\,x\leq ln(x^2+3x+1)$

$\Leftrightarrow ln(2x^2+3x)\leq ln(x^2+3x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2+3x\leq x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow x^2-1\leq 0$

$\Leftrightarrow x\in[-1;1] \qquad S=]0;1]$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{2x}-11e^x\geq -28$

Posons $t=e^x$. On obtient alors,

$t^2-11t\geq -28$

$\Leftrightarrow t^2-11t+28\geq 0 \quad (\Delta=9,\ t_1=4,\ t_2=7)$

$\Leftrightarrow t\in]-\infty;4]\cup[7;+\infty[$

Ainsi, il faut que

$e^x\leq 4$ ou $e^x\geq 7$

$\Leftrightarrow x\leq ln4$ ou $x\geq ln7$

$S=]-\infty;ln4]\cup[ln7;+\infty[$

Question IV

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\underbrace{e^x}_{\to+\infty}-\underbrace{x}_{\to+\infty}-1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\underbrace{e^x}_{\to 0}-\underbrace{x}_{\to-\infty}-1\right)=+\infty$

Pour tout x ∈ ℝ,

$g'(x)=-e^x-1=-(e^x+1)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) g est continue et strictement décroissante sur ℝ et l'image de ℝ par g est ℝ.

Comme 0 ∈ ℝ, l'équation $g(x)=0$ a exactement une solution α dans ℝ.

$g(-1,3)\approx 0,027>0$ et $g(-1,2)\approx -0,1<0$

Donc $-1,3<\alpha<-1,2$.

2) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^x}{e^x\left(1+e^{-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{-x}^{\to-\infty}}{\underbrace{\left(1+e^{-x}\right)}_{\to1}}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{-xe^x}^{\to0}}{\underbrace{e^x+1}_{\to1}}$$

$$= 0$$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x + \dfrac{x}{e^x+1} = \dfrac{-xe^x - x + x}{e^x+1} = \dfrac{-xe^x}{e^x+1} = f(x)$

La droite d d'équation y = -x est A.O. à C_f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-(-x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x + \frac{x}{e^x+1} + x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}_{\to1}$$

$$= 0$$

Donc C_f admet une asymptote oblique d en $+\infty$ d'équation y = - x.

c)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\left(-e^x - xe^x\right)\cdot\left(e^x+1\right) - \left(-xe^x\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-e^{2x} - e^x - xe^{2x} - xe^x + xe^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{-e^{2x} - xe^x - e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\cdot\left(-e^x - x - 1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}_{>0} g(x)$$

Le signe de f' est celui de g.

Tableau des signes de g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Tableau des variations de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$ max	$\searrow$	$-\infty$

$f(\alpha) \approx 0.28.$

Question V

a) C_f et C_g ont une tangente commune au point d'abscisse e^2 ssi
$f'(e^2) = g'(e^2)$ et $f(e^2) = g(e^2)$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$ et $g(e^2) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^2}} = \frac{1}{e^2}$ et $f(e^2) = \ln(e^2) = 2$ et $g(e^2) = \frac{2}{e}\sqrt{e^2} = \frac{2}{e} \cdot e = 2$

Comme $f'(e^2) = g'(e^2)$ et $f(e^2) = g(e^2)$, C_f et C_g ont une tangente commune au point A(e^2;2).

b) $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$ Posons : $u(t) = \ln t$ $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $v(t) = t$

Donc $F(x) = [\ln t \cdot t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot t dt = x\ln x - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$, avec $c \in \mathbb{R}$.

c) $\forall x \in]0;+\infty[$: $G'(x) = \frac{4}{3e}\left(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{4}{3e}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = \frac{2}{e}\sqrt{x}$
et $G(1) = \frac{4}{3e} - \frac{4}{3e} = 0$

d) Pour tout $x \in [1; e^2]$, $g(x) \geq f(x)$, donc

$$A = \int_1^{e^2} [g(x) - f(x)] dx = [G(x) - F(x)]_1^{e^2}$$

$$= G(e^2) - F(e^2) - (G(1) - F(1))$$

$$= \frac{4}{3e} e^2 \cdot e - \frac{4}{3e} - (2e^2 - e^2 + 1)$$

$$= \frac{4e^3 - 4 - 3e^3 - 3e}{3e}$$

$$= \frac{e^3 - 3e - 4}{3e}$$

$\cong 0{,}973$ u.a.

Question VI

a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

$$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$y = \frac{-\ln a}{a^2}(x-a)+\frac{1+\ln a}{a}$$

$$y = \frac{-\ln a}{a^2}x+\frac{\ln a}{a}+\frac{1+\ln a}{a}$$

$$y = \frac{-\ln a}{a^2}x+\frac{1+2\ln a}{a}$$

b) $O(0;0) \in T_a \Leftrightarrow 0 = \dfrac{-\ln a}{a^2}0+\dfrac{1+2\ln a}{a}$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{2\ln a+1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \ln a = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Il existe un seul point M(a ; f(a)) tel que la tangente à C_f en M passe par l'origine. C'est le point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2} \quad M\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$$

Question VII

a) $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{x\sqrt{2x-x^2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{x(2x-x^2)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{-x^2}^{\to 4}}{\underbrace{\sqrt{2x-x^2}}_{\to 0^+}}$$

$$= -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 2 et C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x = 2. Vrai.

b) Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^4 - x + 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 8x^3 - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

De plus f' est strictement croissante sur ℝ.

Tableau des variations

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{5}{8}$	$\nearrow$	

$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{5}{8}$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution dans ℝ. Faux.

Question IX

a) $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1$

$= \frac{\ln 2}{2}$ (1)

b)

$I + J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2}\right) dx$

$= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\, dx$

$= \int_0^1 \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\, dx$

$= \int_0^1 x\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}$

c) $I + J = \frac{1}{2} \Leftrightarrow J = \frac{1}{2} - I$ (2)

(1) dans (2) : $J = \frac{1}{2} - \frac{ln2}{2} = \frac{1-ln2}{2}$

Question X

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(3x)e^x \, dx$$

Posons : $u(x) = sin(3x)$ $u'(x) = 3cos(3x)$

$v'(x) = e^x$ $v(x) = e^x$

Ainsi,

$$I = \left[sin(3x) \cdot e^x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3cos(3x) \cdot e^x \, dx$$

$$= -3\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(3x) \cdot e^x \, dx$$

Donc :

$$I = -3\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos(3x) \cdot e^x \, dx$$

Posons : $u(x) = cos(3x)$ $u'(x) = -3sin(3x)$

$v'(x) = e^x$ $v(x) = e^x$

$$= -3\left(\left[cos(3x)e^x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-3\,sin(3x) \cdot e^x \right) dx \right)$$

$$= -3\left(-e^{\frac{\pi}{3}} - 1 + 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(3x) \cdot e^x \, dx \right)$$

$$= 3e^{\frac{\pi}{3}} + 3 - 9J$$

D'où, $I = 3e^{\frac{\pi}{3}} + 3 - 9I \Leftrightarrow 10I = 3e^{\frac{\pi}{3}} + 3 \Leftrightarrow I = \frac{3}{10}e^{\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{10}$

Question XI

Tableau des variations de F

x	-3		0		4		7
$F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
F		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La courbe B ne convient pas car F est croissante sur [0 ; 4].

$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ donc la courbe A ne convient pas.