Code branche MATHE I	Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse **EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES** Régime technique – Session 2015	
Épreuve écrite	Branche	Division / Section
Durée de l'épreuve **3 h**	**Mathématiques I**	**GE / GI**
Date de l'épreuve 15.09.2015		

Question I *(3+4+2 = 9 points)*

Démontrer :

a) Pour tout réel $a > 0$ et tout entier relatif p, $\ln a^p = p \ln a$.

b) La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$: $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

c) $\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Question II *(4+3 = 7 points)*

La fenêtre normande, formée d'un demi-disque au-dessus d'un rectangle, est encore un élément architectural populaire. Considérons une fenêtre normande dontle périmètre est de 300 *cm*.
x désigne le rayon du demi-cercle de la fenêtre (*en cm*), avec $0 < x < 58$.

1) Démontrer que l'aire d'une telle fenêtre est donnée par : $A(x) = 300x - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)x^2$.

2) Pour quelle valeur de x, l'aire de la fenêtre est-elle maximale (pour laisser entrer le plus de lumière possible) ?

Question III *(3+3 = 6 points)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln(2x+3) \leq \ln(x^2+3x+1) - \ln x$

b) $e^{2x} - 11e^x \geq -28$

Question IV *(2+2+2+2+3 = 11 points)*

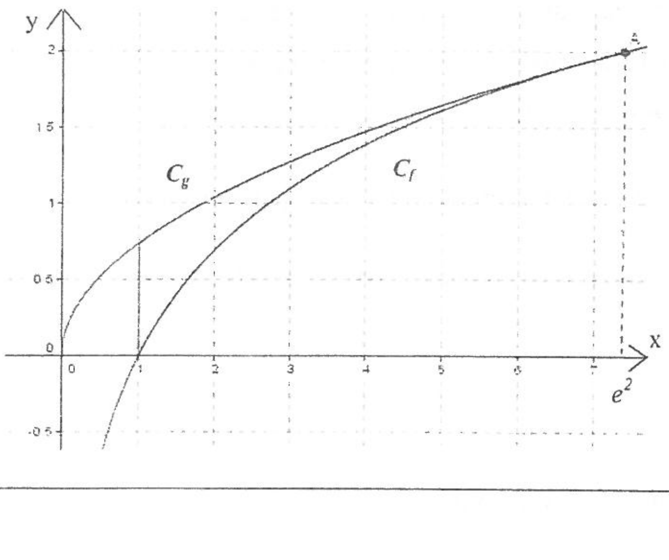
1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -e^x - x - 1$.
   a) Étudier le sens de variation de g et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de α au dixième près.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-xe^x}{e^x + 1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + \dfrac{x}{e^x + 1}$.
   En déduire que C_f admet une asymptote oblique d en $+\infty$ dont on donnera une équation.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot g(x)}{\left(e^x + 1\right)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

Question V *(3+2,5+1,5+1=8 points)*

Soient f et g deux fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x}$ et soient C_f et C_g leurs courbes representatives dans un repère orthonormé.

a) Démontrer que les courbes C_f et C_g ont une tangente commune en $A(e^2 ; 2)$.
b) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1.
c) Montrer que la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = \frac{4}{3e}x\sqrt{x} - \frac{4}{3e}$ est la primitive de g qui s'annule en 1.
d) Calculer l'aire de la partie colorée ci-dessous.



Question VI *(2+2 = 4 points)*

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ et C_f sa courbe representative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit $a > 0$. Donner l'équation réduite de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a.

b) Démontrer qu'il existe un seul point $M(a\,;f(a))$ tel que la tangente à C_f en M passe par l'origine. Donner les coordonnées de ce point M.

Question VII *(2+3 = 5 points)*

"Vrai"ou"faux"? Justifier :

a) La courbe représentative C_f de la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 2.

b) L'équation $2x^4-x+1=0$ a exactement deux solutions dans □ .

Question VIII *(1+2+1 = 4 points)*

On pose $I=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ et $J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

a) Calculer I.

b) Calculer $I + J$.

c) En déduire la valeur de J.

Question IX *(4 points)*

Calculer : $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x)e^x\,dx$

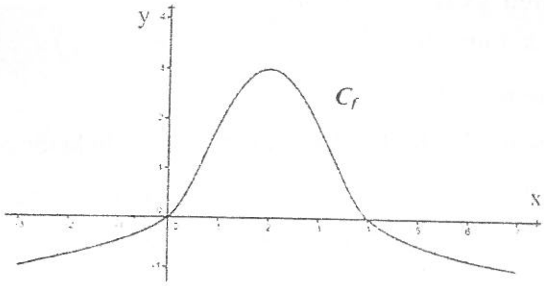
---

voir verso

Question X *(2 points)*

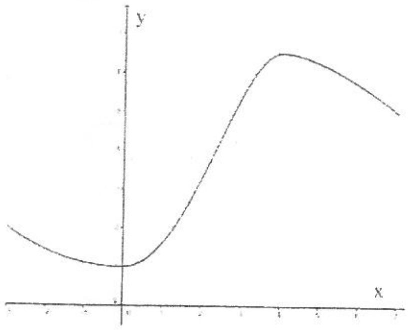
On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur [-3 ;7].

Soit F la fonction définie sur [-3 ;7] par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.



Justifier pourquoi les courbes A et B ne peuvent pas représenter F.

Courbe A



Courbe B