13GE/GI – Mathématiques I – Corrigé

1. Question de cours. Théorèmes II.7.a page 6 et II.1 page 2.

(4+5 = **9** pts)

---

2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{2-x}$

a) Conditions d'existence: $x^2-2x\geq 0$ et $2-x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\cdot(x-2)\geq 0$ et $x\neq 2$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right[$ et $x\neq 2$

$D_f=\left]-\infty;0\right]\cup\left]2;+\infty\right[$

b) Dérivabilité de f en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to +0^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x(2-x)}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}$

$$=\lim_{x\to +0^-}\frac{x^2-2x}{x(2-x)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to +0^-}\frac{(x-2)x}{x(2-x)\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\lim_{x\to +0^-}\frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\to 0^+}}=-\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

c) $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]2\,;\,+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{(2-x)\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}-(-1)\sqrt{x^2-2x}}{(2-x)^2}$$

$$=\frac{(2-x)\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\sqrt{x^2-2x}}{(2-x)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\frac{(2-x)(x-1)+x^2-2x}{(2-x)^2\sqrt{x^2-2x}}$$

$$=\frac{2x-x^2-2+x+x^2-2x}{(2-x)^2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-2}{(2-x)^2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$$

(2+3+4 = **9** pts)

---

3. $D=\mathbb{R}$

a) $\forall x\in\mathbb{R}: e^x+1-2e^{-x}\leq 0\ \ |\cdot e^x>0$

$\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2+e^x-2\leq 0$ On pose: $X=e^x>0$.

L'inéquation s'écrit: $X^2+X-2\leq 0$ $\Delta=9\Rightarrow X_1=1$ et $X_2=-2$ (à rejeter)

Tableau des signes:

X	0		1		$+\infty$
X^2+X-2	||	$-$	0	$+$	

$\Leftrightarrow X\in\left]0;1\right]$

$\Leftrightarrow e^x\leq 1$

$\Leftrightarrow x\leq 0$

$S=\left]-\infty;0\right]$

b) $2\ln(2x-1)-\ln 4=\ln(5-x)$

C.E. $2x-1>0$ et $5-x>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ et $x<5$

$D=\left]\frac{1}{2};5\right[$

$\forall x \in D: 2\ln(2x-1)-\ln 4=\ln(5-x)$

$\Leftrightarrow \ln(2x-1)^2=\ln\left[(5-x)\cdot 4\right]$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2=(5-x)\cdot 4$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=20-4x$

$\Leftrightarrow 4x^2=19$

$\Leftrightarrow x=\underbrace{\frac{\sqrt{19}}{2}}_{\in D}$ ou $\underbrace{-\frac{\sqrt{19}}{2}}_{\notin D}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{19}}{2}\right\}$

(4+4 = 8 pts)

---

4. a) On a: $V=1L=1\,dm^3$. Donc : $\pi x^2\cdot h=1 \Leftrightarrow h=\dfrac{1}{\pi x^2}$.

Alors : $\forall x \in]0;+\infty[: A(x)=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi x^2+2\pi x\cdot\dfrac{1}{\pi x^2}=2\pi x^2+\dfrac{2}{x}$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[: A'(x)=4\pi x-\dfrac{2}{x^2}$.

$\forall x \in]0;+\infty[: A'(x)=0 \Leftrightarrow 4\pi x-\dfrac{2}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4\pi x^3-2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 4\pi x^3-2=0 \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Tableau de variation:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$	$+\infty$
$A'(x)$	$\|$ −	0	+
A	$\|$ ↘	MIN	↗

Donc l'emballage est minimal si le rayon de la base du cylindre vaut $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\approx 0{,}54$ dm.

$A_{\min}=A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)=2\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}^2+2\cdot\sqrt[3]{2\pi}\cong 5{,}54\ \text{dm}^2$

(4+3 = 7pts)

---

5. $f: x \mapsto (x+1)e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}: f'(x)=(x+1)e^x+e^x=(x+2)e^x$

Equation de la tangente T_a en un point quelconque d'abscisse a de la courbe:

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=(a+2)e^a(x-a)+(a+1)e^a$

$y=(a+2)e^a x-(a^2+2a)e^a+(a+1)e^a$

$y=(a+2)e^a x+(-a^2-a+1)e^a$

$A(1;0)\in T_a \Leftrightarrow 0=(a+2)e^a+(-a^2-a+1)e^a$

$\Leftrightarrow 0=(-a^2+3)e^a$

$\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$ ou $a=-\sqrt{3}$

Aux points d'abscisses $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ respectivement, la courbe admet une tangente passant par A.

(5 pts)

6. $f(x) = 3 - x - \ln x$ $\qquad D_f =]0;+\infty[$

1. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(3 - \underbrace{x}_{\to 0} - \underbrace{\ln x}_{-\infty}\right) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(3 \underbrace{-x}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln x}_{+\infty}\right) = -\infty$

$\forall x \in D_f : f'(x) = -1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x-1}{\underbrace{x}_{>0}} \qquad \forall x \in D_f : f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x-1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \notin D_f$

Tableau des variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
f	$\|\|+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

b) f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ avec $0 \in f(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle $\alpha \in]0;+\infty[$.

c) Tableau des signes :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

2. $g(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$ $\qquad D_g =]0;+\infty[$

a) $\forall x \in D_g : g'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x^2}\cdot(2 - \ln x)$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-x + 3 - \ln x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

Donc le signe d g'(x) est celui de f(x).

Tableau des variations :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha - \ln\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \ln\alpha = 3 - \alpha$

Alors, on obtient : $g(\alpha) = \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right)(2 - \ln\alpha)$

$$= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(2 - 3 + \alpha)$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha}(-1 + \alpha)$$

$$= \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

((3+2+1)+(3+2) = 11points)

7. a) $I=\int_1^e (2x-1)\ \ln x\ dx$ Intégration par parties: $u(x)=\ln x \qquad u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$v'(x)=2x-1 \qquad v(x)=x^2-x$

Donc: $I=\left[\left(x^2-x\right)\ln x\ \right]_1^e-\int_1^e \dfrac{x^2-x}{x}\,dx$

$=\left[\left(e^2-e\right)\ln e-0\right]-\int_1^e (x-1)\,dx$

$=e^2-e-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^e$

$=e^2-e-\left[\frac{1}{2}e^2-e-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}$

b) $I-J=\int_1^e\left[(2x-1)-\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}\ \right]\ln x\ dx$

$=\int_1^e \dfrac{2x^2-x-2x^2+2x-x+1}{x}\ \ln x\ dx$

$=\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}\ dx$

$=\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}$

$J=I-(I-J)$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}e^2-1$

(4+3= 7 points)

---

8. $A=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx$

$=\int_{-1}^0 \dfrac{3x}{x^2-4}dx-\int_0^{\frac{3}{2}} \dfrac{3x}{x^2-4}dx$

$=\dfrac{3}{2}\left[\ln\left|x^2-4\right|\right]_{-1}^0-\dfrac{3}{2}\left[\ln\left|x^2-4\right|\right]_0^{\frac{3}{2}}$

$=\dfrac{3}{2}(\ln 4-\ln 3)-\dfrac{3}{2}\left(\ln\dfrac{7}{4}-\ln 4\right)$

$=\dfrac{9}{2}\ln 4-\dfrac{3}{2}\ln 21$

$=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{64}{21}$ u.a.

(4 points)
