Code branche **MATHE I**	Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse **EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES** Régime technique – Session 2015	
Épreuve écrite	Branche	Division / Section
Durée de l'épreuve **3h**	**Mathématiques 1**	**GE / GI**
Date de l'épreuve **18 mai 2015**		

Question 1 (4+5 = **9 points**)

Démontrer les théorèmes suivants :

a) pour tout entier n, $n \geq 1$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$;

b) pour tout réel a et tout réel b, on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Question 2 (2+3+4 = **9 points**)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{2-x}$. Soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

c) Déterminer la fonction dérivée de f. Mettre le résultat sous forme de fraction irréductible.

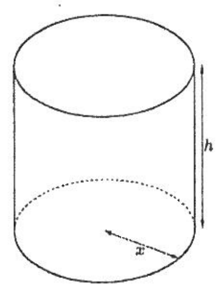
Question 3 (4+4 = **8 points**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

a) $e^x + 1 - 2e^{-x} \leq 0$.

b) $2\ln(2x-1) - \ln 4 = \ln(5-x)$

Question 4 (4+3 = **7 points**)



On veut fabriquer des boîtes de conserve cylindriques d'une contenance de 1L en utilisant le moins d'emballage possible. On note x le rayon de la base du cylindre et h sa hauteur.

a) Montrer que l'aire totale de la boîte est donnée par $A(x) = 2\pi x^2 + \frac{2}{x}$ avec $x > 0$.

b) Déterminer la valeur exacte du rayon de la boîte pour qu'il y ait un minimum d'emballage. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de cet emballage minimal.

Question 5 (**5 points**)

Soit C la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\cdot e^x$.
Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe passant par le point A(1;0).

Question 6 ((3+2+1) + (3+2) = **11 points**)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x - \ln x$.

1. **a)** Etudier les limites aux bornes du domaine et les variations de f sur $]0;+\infty[$.
   b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle α.
   c) Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$.
   a) Etudier les variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
   b) Montrer que $g(\alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

Question 7 (4+3 = **7 points**)

Soient les intégrales $I = \int_1^e (2x-1)\ln x \, dx$ et $J = \int_1^e \frac{(2x+1)(x-1)\ln x}{x} \, dx$.

a) Déterminer la valeur exacte de I.

b) Déterminer la valeur exacte de $I - J$. En déduire la valeur exacte de J.

Question 8 (**4 points**)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-2;2[par $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$.

Calculer l'aire de la surface comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$.

Mettre le résultat sous la forme $a \cdot \ln b$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.