Corrigé – Mathématiques I – 13GE / GI

Question I (voir recueil) (5+4+1 = 10 points)

Question II (3+13 = 16 points)

Partie A (3 points):

$2\,e^{2x} - 12\,e^{x} + 10 \geq 0$

Posons y= e^x

Donc résolvons $2y^2 - 12y + 10 \geq 0$

$\Leftrightarrow y \in \,]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$

$\Leftrightarrow y \leq 1$ ou $y \geq 5$

$\Leftrightarrow e^x \leq 1$ ou $e^x \geq 5$

$\Leftrightarrow x \leq \ln(1)$ ou $x \geq \ln(5)$

$\Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq \ln(5)$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 64 \\ y_1 = \frac{12-8}{4} = 1 \\ y_2 = \frac{12+8}{4} = 5\end{gathered}}$$

$\mathcal{S} = \,]-\infty; 0] \cup [\ln(5)\,; +\infty\,[$

Partie B : (3+4,5+1,5+4=13 points)

$f(x) = e^{2x} - 12e^x + 10x + 11$

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{-12e^x}_{\to-\infty}\underbrace{+10x}_{\to+\infty}+11\right]$ $F.I.$ "∞-∞"

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{+\infty}\cdot\left(\underbrace{1\underbrace{-12/e^x}_{\to 0}}_{\to 1}\right)\underbrace{+10x}_{\to+\infty}+11\right]$$

$= +\infty$

La fonction f n'admet pas d'A.H. en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\underbrace{-12e^x}_{\to 0}\underbrace{+10x}_{\to-\infty}+11\right] = -\infty$$

f n'admet pas d'A.H. en $-\infty$.

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{12e^x}{x} + 10 + \frac{11}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{e^x}_{\to 0} - \underbrace{\frac{12e^x}{x}}_{\to 0} + 10 + \underbrace{\frac{11}{x}}_{\to 0}\right)$$

$= 10$ donc $a = 10$

$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$

$= \lim_{x\to-\infty}[e^{2x} - 12e^x + 10x + 11 - 10x]$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\underbrace{-12e^x}_{\to 0}+11\right]$$

$= 11$ donc $b = 11$

La courbe admet en $-\infty$ une A.O. d'équation $y = 10x + 11$

Position A.O. par rapport à $\mathcal{C}_f$:

Etudions le signe de $f(x) - y$:

$\forall x \in]-\infty; 0]$:

$f(x) - y$

$= e^{2x} - 12e^{x} + 10x + 11 - 10x - 11$

$= e^{2x} - 12e^{x}$

$= \underbrace{e^{x}}_{>0}(e^{x} - 12)$

$e^{x} - 12 < 0$

$\Leftrightarrow x < \ln 12$

$f(x) - y < 0$ ssi $x < \ln 12$ donc sur $]-\infty; 0]$ la courbe est en-dessous de Δ.

3) $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2e^{2x} - 12e^{x} + 10$

De la partie A on peut déduire le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$10\ln 5 - 24$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 5) = e^{2\ln 5} - 12e^{\ln 5} + 10\ln 5 + 11$
$= 25 - 60 + 10\ln 5 + 1$
$= 10\ln 5 - 24$

$f(0) = 1 - 12 + 0 + 11 = 0$

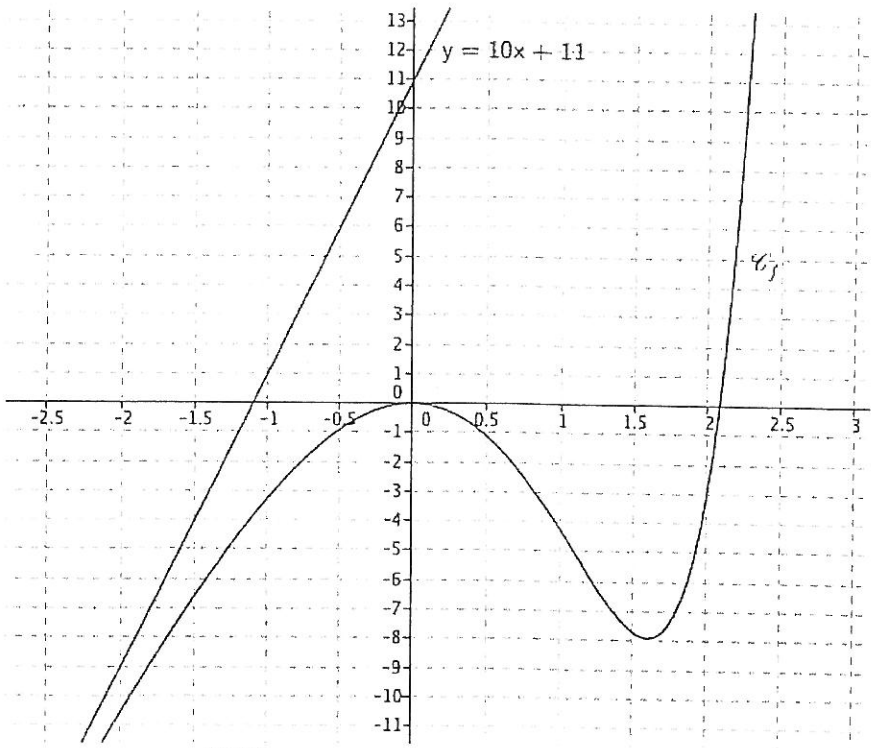
4) $f(2) = e^{4} - 12e^{2} + 31 \approx -3{,}07$

$f(3) = e^{6} - 12e^{3} + 41 \approx 203{,}4$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictment croissante sur $]2\,;3[$ et $f(2) \cdot f(3) < 0$

Il existe une solution unique α, telle que $f(x) = 0$ sur $]2\,;3[$ et $2{,}08 < \alpha < 2{,}09$

5) Représentation graphique :



Question III : (4 points)

$$1+\ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)<\ln[e\cdot(x+1)]$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{1-x}\right)-\ln(x+1)<\ln e-1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x+1}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x+1}<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x^2}-1<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-1}{\underbrace{1-x^2}_{>0\ sur\ E}}<0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1<0$$

$$S=]0;\ -1+\sqrt{2}[$$

C.E. 1) $x\neq 1$ 2) $\frac{2x}{1-x}>0$ 3) $e\cdot(x+1)>0$

$\Leftrightarrow x\in]0;1[$ $\Leftrightarrow\ x>-1$

$E=]0;1[$

$\Delta=4+4=8$

$$y_1=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}\approx -2{,}41$$

$$y_1=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}\approx 0{,}414$$

Question IV : (8 points)

Notons $\mathcal{D}$ le domaine en question. Alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathcal{D})&=\int_{e^{-1}}^{1}-f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\int_{e^{-1}}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=-F(1)+F\left(e^{-1}\right)+F(2)-F(1)\\&=F\left(e^{-1}\right)+F(2)-2F(1),\end{aligned}$$

où F est une primitive de f sur $\left[e^{-1};2\right]$. Soit G une autre primitive de f sur cet intervalle. Elle est (par exemple) définie par :

$$G(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x t\ln t\,\mathrm{d}t$$

Intégrons par parties :

$$\begin{array}{|ll} u(t)=\ln t & u'(t)=\frac{1}{t}\\ v'(t)=t & v(t)=\frac{t^2}{2}\end{array}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}G(x)&=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x-\int_1^x\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\&=\left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^x-\left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-0-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Choisissons donc pour F :

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathcal{D})&=F\left(e^{-1}\right)+F(2)-2F(1)\\&=-\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^{-2}}{4}+2\ln 2-1-2\left(0-\frac{1}{4}\right)\\&=\boxed{\left(-\frac{3}{4e^2}+2\ln 2-\frac{1}{2}\right)\ \text{u.a.}}\end{aligned}$$

Question V : (2+3 = 5 points)

a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{t \cdot ln^2(t)}\, dt$

$= \int_e^{e^2} \frac{1}{t} \cdot (lnt)^{-2}\, dt$

$= \left[-\frac{1}{lnt}\right]_e^{e^2}$

$= -\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^3(\pi t) dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) \cdot \cos^2(\pi t) dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi t) \cdot \left(1 - \sin^2(\pi t)\right) dt$

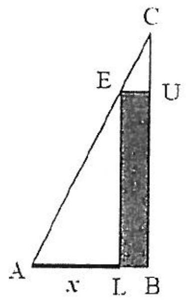
$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos(\pi t) - \cos(\pi t) \cdot \sin^2(\pi t)\right)\ dt$

$= \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) - \frac{1}{3\pi}\sin^3(\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} - 0 + 0$

$= \frac{2}{3\pi}$

Question VI : (1+4+2 = 7 points)



1) →

2) $EL = UB$ et $BL = 6 - x$

Par le théorème de Thalès dans le triangle ABC avec $(EL) \parallel (BC)$:

$\frac{AL}{AB} = \frac{EL}{BC}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{EL}{18}$

$\Leftrightarrow EL = 3x$

Donc l'aire du rectangle BLEU :

$A(x) = BL \cdot EL$

$\Leftrightarrow A(x) = (6 - x) \cdot 3x$

$\Leftrightarrow A(x) = 18x - 3x^2$

3) La fonction A est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in]0; 6[$: $A'(x) = 18 - 6x = 6(3 - x)$

x	0		3		6
$A'(x)$		+	0	−	
$A(x)$	0	↗	Max	↘	0

$\lim_{x \to 0} A(x) = 0$

$\lim_{x \to 6} A(x) = 0$

Donc l'aire du rectangle est maximale lorsque AL = 3 m, c'est-à-dire L se situe au milieu de $[AB]$.

Question VII (10 points)

$f(x)=e^{3x}-2x+1 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$M(x_0;f(x_0))$ un point appartenant à C_f. $\qquad \forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=3e^{3x}-2$

T_{x_0} est la tangente à C_f en M.

$$T_{x_0} \equiv y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=\left(3e^{3x_0}-2\right)(x-x_0)+e^{3x_0}-2x_0+1$$

$$y=\left(3e^{3x_0}-2\right)x-3e^{3x_0}\cdot x_0+\cancel{2x_0}+e^{3x_0}-\cancel{2x}_0+1$$

$$\underline{y=\left(3e^{3x_0}-2\right)x-3e^{3x_0}\cdot x_0+e^{3x_0}+1}$$

$$A\in T_{x_0} \Leftrightarrow 0=\left(3e^{3x_0}-2\right)\left(\frac{-1}{3}\right)-3e^{3x_0}\cdot x_0+e^{3x_0}+1$$

$$\Leftrightarrow 0=\cancel{-e^{3x_0}}+\frac{2}{3}-3e^{3x_0}\cdot x_0\cancel{+e^{3x_0}}+1$$

$$\Leftrightarrow 0=-3e^{3x_0}\cdot x_0+\frac{5}{3}$$

Posons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-3e^{3x}\cdot x+\frac{5}{3}$ pour résoudre $g(x)=0$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x)=-9e^{3x}\cdot x-3e^{3x}$$

$$=\underbrace{-3e^{3x}}_{<0}(3x+1)$$

$$g\left(-\tfrac{1}{3}\right)=-3e^{-1}\left(-\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{5}{3}$$

$$=e^{-1}+\tfrac{5}{3}\approx 2{,}03$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{-3e^{3x}\cdot x}_{\to+\infty}+\frac{5}{3}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-3\underbrace{x\cdot e^{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}+\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$e^{-1}+\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

g est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$.
De plus g est strictement positive sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$.
Donc $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[$.

g est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.
De plus $g\left(\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[\right)=\left]-\infty;e^{-1}+\frac{5}{3}\right]$ et $0\in\left]-\infty;e^{-1}+\frac{5}{3}\right]$.
Donc $g(x)=0$ admet une solution unique sur $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

C_f admet une seule tangente passant par le point $A\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$