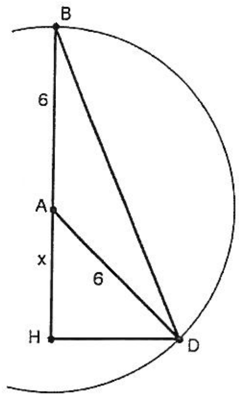
Corrigé

Question I (4+4 = 8 points)

voir recueil : Théorèmes II1 et I1.

Question II (3+1+3 = 7 points)



1) $BH = x+6$

Triangle AHD

Par Pythagore :

$AD^2 = AH^2 + HD^2$

$36 = HD^2 + x^2$

$HD = \sqrt{36-x^2}$

Triangle BHD

Par Pythagore :

$BD^2 = BH^2 + HD^2$

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x+6)^2 + 36 - x^2 \\ &= x^2 + 12x + 36 + 36 - x^2 \\ &= 72 + 12x \\ &= 12(6+x) \end{aligned}$$

$BD = \sqrt{12(6+x)} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+x}$

2) $A = \pi \cdot HD \cdot BD$

$\forall x \in [0;6[$:

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\cdot\sqrt{36-x^2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+x} \\ &= 2\sqrt{3}\pi\cdot\sqrt{(36-x^2)\cdot(6+x)} \\ &= 2\sqrt{3}\pi\cdot\sqrt{216+36x-6x^2-x^3} \end{aligned}$$

3) $\forall x \in [0;6[$:

$$A'(x) = 2\sqrt{3}\pi\cdot\frac{36-12x-3x^2}{2\sqrt{216+36x-6x^2-x^3}} = 3\sqrt{3}\pi\cdot\frac{-x^2-4x+12}{\sqrt{216+36x-6x^2-x^3}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$-x^2-4x+12=0 \qquad \Delta = 16+48=64$

$\Leftrightarrow x = \frac{4-8}{-2} = 2$ ou $x = \frac{4+8}{-2} = -6$

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$-x^2-4x+12$		-	0	+	0	-	

x	0		2		6
A'(x)		+	0	-	
A		↗	max	↘	

L'aire est maximale pour $x=2$.

Le cône a alors un rayon de $\sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ cm et une hauteur de 8cm.

Question III (1+5 = 6 points)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{u}'(x)e^{u(x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x^2+2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^3-1\right) \approx 9{,}54 \end{aligned}$$

$u(x) = x^2+2x$

$u'(x) = 2x+2 = 2(x+1) \Big| \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}u'(x) = x+1$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (x^2+2x)e^{x+1}dx \\ &= \left[(x^2+2x)e^{x+1}\right]_0^1 - 2\int_0^1 (x+1)e^{x+1}dx \\ &= 3e^2 - 0 - 2\left(\left[(x+1)e^{x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx\right) \\ &= 3e^2 - 2\left(2e^2 - e - \left[e^{x+1}\right]_0^1\right) \\ &= 3e^2 - 4e^2 + 2e + 2(e^2 - e) \\ &= e^2 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ll} u_1(x) = x^2+2x & v'(x) = e^{x+1} \\ u_1'(x) = 2x+2 & v(x) = e^{x+1} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ll} u_2(x) = x+1 & v'(x) = e^{x+1} \\ u_2'(x) = 1 & v(x) = e^{x+1} \end{array} \right.$$

Question IV (5+3+2+7+3 = 20 points)

$$f(x) = \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x+1}$$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - 4x + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = 2e^{2x} - 4 = 2\left(e^{2x} - 2\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} \overset{>}{=} 2 \Leftrightarrow 2x \overset{>}{=} \ln 2$ $\quad$ |ln str. ↗

$\Leftrightarrow x \overset{>}{=} \dfrac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g		↘	$3-2\ln(2)$	↗	

$g(\dfrac{\ln 2}{2}) = 2 - 2\ln(2) + 1 = 3 - 2\ln(2) \approx 1{,}6$

$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq g(\dfrac{\ln 2}{2}) > 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0} - 2}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - 4x + 1}_{\to +\infty}} = 0$$ A.H. en $-\infty$ d'équation : $y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1 - \dfrac{2}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1 - \dfrac{4x}{e^{2x}} + \dfrac{1}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \overbrace{\dfrac{2}{e^{2x}}}^{\to 0}}{1 - 4 \cdot \underbrace{\dfrac{x}{e^x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{e^x}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}} = 1$$

A.H. en $+\infty$ d'équation : $y = 1$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^{2x}-4x+1)-(e^{2x}-2)(2e^{2x}-4)}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{4x}-8xe^{2x}+2e^{2x}-(2e^{4x}-4e^{2x}-4e^{2x}+8)}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$=\frac{-8xe^{2x}+10e^{2x}-8}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$=\frac{2(-4xe^{2x}-4+5e^{2x})}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

$$=\frac{2\cdot h(x)}{\left(e^{2x}-4x+1\right)^2}$$

avec $h(x)=-4x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}-4$.

4) $\forall x \in \mathbb{R} : h'(x)=-4\mathrm{e}^{2x}-4x\cdot 2\mathrm{e}^{2x}+5\cdot 2\mathrm{e}^{2x}-0=(6-8x)\mathrm{e}^{2x}=\underbrace{2}_{>0}(3-4x)\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{>0}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	
h	-4	↗	$2e^{\frac{3}{2}}-4$	↘	$-\infty$

$h(\frac{3}{4})=-3\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}+5\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-4=2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-4\approx 4{,}96>0$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}-4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-4\underbrace{x\mathrm{e}^{x}}_{\to 0}\underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{\to 0}+5\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{\to 0}-4\right)=-4$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4x\mathrm{e}^{2x}+5\mathrm{e}^{2x}-4\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{(-4x+5)}_{\to-\infty}\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{\to+\infty}-4\right)=-\infty$$

- h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;\frac{3}{4}]$ et $h(]-\infty;\frac{3}{4}])=]-4;2e^{\frac{3}{2}}-4]$ et $0\in]-4;2e^{\frac{3}{2}}-4]$, donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]-\infty;\frac{3}{4}]$.
- h est continue et strictement décroissante sur $]\frac{3}{4};+\infty[$ et $h(]\frac{3}{4};+\infty[)=]2e^{\frac{3}{2}}-4;-\infty[$ et $0\in]2e^{\frac{3}{2}}-4;-\infty[$, donc l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique $\beta\in]\frac{3}{4};+\infty[$.

$-0{,}18<\alpha<-0{,}17$ et $1{,}14<\beta<1{,}15$

5) $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 2}{2}$

$$A=-\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x+1}\,dx \qquad \left| \begin{array}{l} g(x)=e^{2x}-4x+1>0 \\ g'(\mathrm{x})=2(e^{2x}-2x) \quad \left|\cdot\tfrac{1}{2}\right. \\ \tfrac{1}{2}g'(\mathrm{x})=e^{2x}-2x \end{array}\right.$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln(e^{2x}-4x+1)\Big]_0^{\frac{\ln 2}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln\big(2-2\ln(2)+1\big)-\ln 2\Big]$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln\big(3-2\ln(2)\big)-\ln 2\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{2}{3-2\ln(2)}\right]\approx 0{,}107 u.a.$$

Question V ((1+3)+6+4 = 14 points)

1) **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[2x+1+\dfrac{\ln(x)}{\underbrace{x-1}_{\to 1}}\right]=4\overset{!}{=}f(1)$. Donc f est continue en $x=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\underbrace{2x}_{\to 0}+1+\underbrace{\dfrac{\overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to -1}}}_{\to +\infty}\right]=+\infty$. L'axe (O$y$) : $x=0$ est asymptote verticale à C_f.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{2x}_{\to+\infty}+1+\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to+\infty}}{\underbrace{x-1}_{\to+\infty}}\right] \quad f.i.$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{2x}_{\to+\infty}+1+\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}}_{\to 1}\right]=+\infty$$

$d: y=2x+1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$, car :

$$\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)-(2x+1)\big]=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}}_{\to 1}=0$$

2) $\ln(x+1)-\ln\sqrt{4-x}=\frac{1}{2}\ln(x+3)$

Conditions :

$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$4-x>0 \Leftrightarrow x<4 \qquad D=]-1;4[$

$x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

$\forall x \in D$:

$\ln(x+1)-\ln\sqrt{4-x}=\frac{1}{2}\ln(x+3)$

$\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(4-\mathrm{x})=\frac{1}{2}\ln(x+3) \qquad |\cdot 2$

$2\ln(x+1)-\ln(4-\mathrm{x})=\ln(x+3) \qquad |+\ln(4-x)$

$\ln(x+1)^2=\ln(x+3)+\ln(4-x)$

$\ln(\mathrm{x}^2+2x+1)=\ln(x+3)(4-x)$

$x^2+2x+1=-x^2+x+12$

$2x^2+x-11=0$

$\Delta=1+88=89$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{89}}{4}\approx -2{,}6 \quad ; \qquad x_2=\frac{-1+\sqrt{89}}{4}\approx 2{,}1$

À rejeter

$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{89}}{4}\right\}$

3) $\forall x \in]-1;+\infty[$:

$h(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}-2x^3+x-\ln(x+1)\right)$

$h'(x)=\frac{1}{4}\left(x-6x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2+x-6x^3-6x^2+x+1-1}{x+1}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-6x^3-5x^2+2x}{x+1}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x\cdot(-6x^2-5x+2)}{\underbrace{x+1}_{>0}}$

$\Delta=25+48=73$

$x_1=\frac{5-\sqrt{73}}{-12}\approx 0{,}3 \qquad ; \qquad x_2=\frac{5+\sqrt{73}}{-12}\approx -1{,}13$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-6x^2-5x+2$		-	0	+	0	-	

x	-1		0		x_1		$+\infty$
x		-	0	+	:	+	
$-6x^2-5x+2$		+	:	+	0	-	
$h'(x)$	||	-	0	+	0	-	
h	||	↘		↗		↘	

Non, h n'est pas décroissante sur $]-1;+\infty[$,

car h est strictement croissante sur $\left[0;\frac{5-\sqrt{73}}{-12}\right[$.

Question VI ((2+1)+2 = 5 points)

1) **a)** F est une primitive de f ssi $F'=f$.

C_2 représente F et C_1 représente $F'=f$, car :

x		1	
$F'(x)=f(x)$	-	0	+
F	↘	min	↗

b) $\int_0^2 f(x)dx = F(2)-F(0) = -2-(-3) = 1$

2) $\forall x \in]0;+\infty[\ : g(x) = ax\ln(x)+bx$

$$g'(x) = a\left[1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right]+b = a\left[1+\ln(x)\right]+b$$

$g(1)=1 \Leftrightarrow a\cdot 1\cdot 0+b\cdot 1=1 \Leftrightarrow \underline{b=1}$ (1)

$g'(1)=3 \Leftrightarrow a+b=3$ (2)

(1)dans (2) : $\underline{a=2}$

Théorie :	8 points
Optimisation :	7 points
Application :	35 points
Compréhension : IV. 1)	5 points
VI.	<u>5 points</u>
	10 points