Corrigé – Mathématiques I – Session 2013 14. 10. 2013

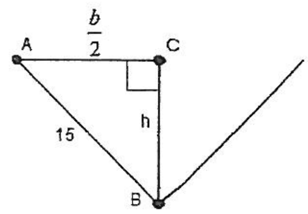
Question I

Voir livre p. 90

Question II

1) a) $b \in]0;30[$

b) Le triangle ABC est rectangle en C



donc par le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Leftrightarrow 15^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 225 - \frac{b^2}{4} = h^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{900-b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{900-b^2}}{2} \quad \text{car } h > 0$$

Ainsi, $A(b) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{900-b^2}}{2} = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{900-b^2}$, pour tout $b \in]0;30[$

2) Soit A la fonction définie sur $]0;30[$ par $A(b) = \frac{b}{4} \cdot \sqrt{900-b^2}$.

Pour tout $b \in]0;30[$,

$$A'(b) = \left.\frac{1}{4} \cdot \sqrt{900-b^2} - \frac{b^2}{4\sqrt{900-b^2}}\right\} > 0 \ \forall b \in]0;30[$$

$$= \frac{900-2b^2}{4\sqrt{900-b^2}}$$

Le signe de A' dépend du signe de $900-2b^2$.

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{900-2b^2}{4\sqrt{900-b^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 450$$

$$\Leftrightarrow b = 15\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad b = -15\sqrt{2} \ \text{(à écarter)}$$

Tableau de variation

b	0		$15\sqrt{2}$		30
$A'(b)$	‖	+	0	-	‖
$A(b)$	‖	↗	max	↘	‖

L'aire de la coupe transversale est maximale lorsque $b = 15\sqrt{2}$ cm et $h = \frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm .

Question III

1) **a)** Conditions d'existence :

$x+3>0$ et $x^2+2x-3>0$ et $x>0$

$\Leftrightarrow x>-3$ et $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]1;+\infty\right[0$ et $x>0$

$D=\left]1;+\infty\right[$

$\forall x\in\left]1;+\infty\right[, \ln(x+3)>\ln(x^2+2x-3)-\ln x$

$\Leftrightarrow \ln(x+3)+\ln x>\ln(x^2+2x-3)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2+3x)>\ln(x^2+2x-3)$

$\Leftrightarrow x^2+3x>x^2+2x-3$

$\Leftrightarrow x>-3$

$S=\left]1;+\infty\right[$

b) $e^{4x}-e^{2x}\leq 6$

Posons $t=e^{2x}$. On obtient alors,

$t^2-t\leq 6$

$\Leftrightarrow t^2-t-6\leq 0 \quad (\Delta=25,\ t_1=-2,\ t_2=3)$

$\Leftrightarrow t\in[-2;3]$

Ainsi, il faut que

$e^{2x}\geq -2$ et $e^{2x}\leq 3$

toujours vrai $\quad \Leftrightarrow 2x\leq ln3$

$\Leftrightarrow x\leq \dfrac{ln3}{2}$

$S=\left]-\infty;\dfrac{ln3}{2}\right]$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}=-1-x \Leftrightarrow e^{-x}+x+1=0$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+x+1$.

$$\left(\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1+xe^{x}+e^{x}\right)=+\infty\end{array}\right)$$ (pas nécessaire)

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x}+1\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\leq 1 \Leftrightarrow -x\leq \ln 1 \Leftrightarrow x\geq 0$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2 min	$\nearrow$	

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 2$,

$f(x)=0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Donc l'équation $e^{-x}=-1-x$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

<u>**Question IV**</u>

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\ln(\overbrace{e^{2x}}^{\to+\infty}+\overbrace{2e^{-x}}^{\to 0})}_{\to+\infty}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\ln(\overbrace{e^{2x}}^{\to 0}+\overbrace{2e^{-x}}^{\to+\infty})}_{\to+\infty}=+\infty$

2) Pour tout reel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^{2x}+2e^{-x}) \\ &= \ln\left[e^{2x}\left(1+2e^{-3x}\right)\right] \\ &= \ln\left(e^{2x}\right)+\ln(1+2e^{-3x}) \\ &= 2x+\ln(1+2e^{-3x}) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\ln(1+\overbrace{2e^{-3x}}^{\to 0})}_{\to 1}=0$ donc C_f admet une A.O. d'éq. y = 2x en $+\infty$.

3) $f(x)-2x=\ln(1+2e^{-3x})$

$\ln(1+2e^{-3x})>0 \Leftrightarrow 1+2e^{-3x}>1 \Leftrightarrow e^{-3x}>0$ toujours vrai

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, C_f est au-dessus de d.

4) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(e^{2x}+2e^{-x})=\ln\left[2e^{-x}\left(\dfrac{e^{3x}}{2}+1\right)\right]=\ln 2-x+\ln\left(\dfrac{e^{3x}}{2}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\ln 2-x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\underbrace{\dfrac{\overbrace{e^{3x}}^{\to 0}}{2}+1}_{\to 1}\right)=0$

donc C_f admet une A.O. d'éq. y = ln2 − x en $-\infty$.

5) Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

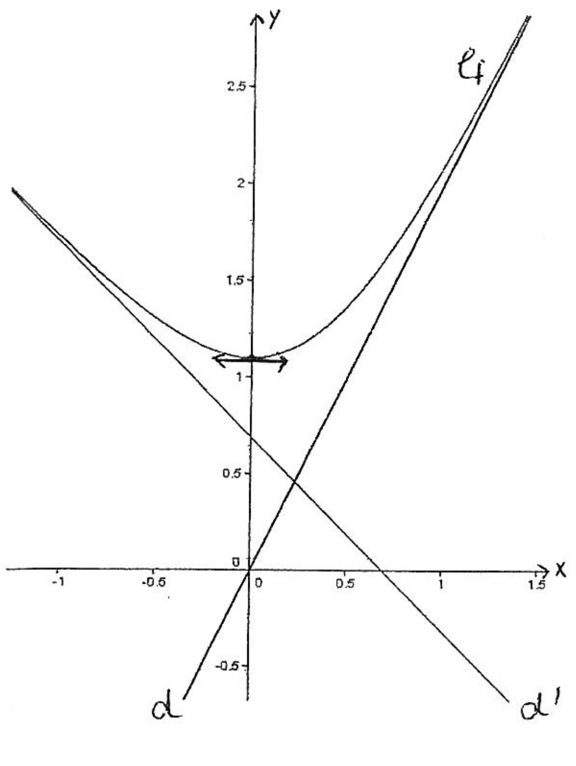
$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-2e^{-x}}{e^{2x}+2e^{-x}}=\dfrac{2\left(e^{2x}-e^{-x}\right)}{e^{2x}+2e^{-x}}$ $\}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Le signe de f' dépend du signe de $e^{2x}-e^{-x}$. Or, $e^{2x}-e^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\geq e^{-x} \Leftrightarrow 2x\geq -x \Leftrightarrow x\geq 0$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 3\cong 1{,}1$	↗	$+\infty$

6)



<u>Tableau de valeurs</u>

x	0,5	1	-0,5
f(x)	≅ 1,4	≅ 2,1	≅ 1,3

Question V

1) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

$T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$y = \dfrac{-\ln a}{a^2}(x-a)+\dfrac{1+\ln a}{a}$

2) O(0;0) $\in \mathrm{T}_a \Leftrightarrow 0 = \dfrac{-\ln a}{a^2}(0-a)+\dfrac{1+\ln a}{a}$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{\ln a}{a}+\dfrac{1+\ln a}{a}$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{2\ln a+1}{a}$

$\Leftrightarrow \ln a = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Oui, il existe un point M(a ; f(a)) tel que la tangente à C_f en M passe par l'origine. C'est le point d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{1+\ln x}^{\to+\infty}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\overbrace{\dfrac{1}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\dfrac{\ln x}{x}}^{\to 0}\right) = 0$

Donc C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Donc l'affirmation est vraie.

Question VI

1) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x-2x+1-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x-2x}{x}$ F.I.

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x(\ln x-2)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} (\ln x-2)$

$= -\infty$ Donc f n'est pas dérivable en 0.

2) Comme f n'est pas dérivable en 0, C_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x = 0, donc la courbe A est la courbe qui représente la fonction f.

Question VII

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $1-\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1-\left(e^{2x}+e^x\right)-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{1}{\left(e^x+1\right)^2}$.

b)

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)dx$$

$$=\left[x-\ln\left|e^x+1\right|+\frac{1}{e^x+1}\right]_0^1$$

$$=1-\ln\left(e+1\right)+\frac{1}{e+1}-\left(0-\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(e+1\right)+\frac{1}{e+1}+\ln 2$$

2) a) $F(x)=-\dfrac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}$.

b) $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(e^x+1\right)^3}\,dx$.

Posons : $u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$

$v'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}$ $\qquad v(x)=-\dfrac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}$

$$J=\left[-\frac{x}{2(e^x+1)^2}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{2\left(e^x+1\right)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\left(e+1\right)^2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2\left(e+1\right)^2}+\frac{1}{2}I$$

$$=-\frac{1}{2\left(e+1\right)^2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\ln\left(e+1\right)+\frac{1}{e+1}+\ln 2\right)$$

$$=-\frac{1}{2\left(e+1\right)^2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(e+1\right)+\frac{1}{2(e+1)}+\frac{1}{2}\ln 2$$

Question VIII

Etudions d'abord le signe de $f(x)=x^3-2x^2-x+2$

$f(1)=0$ et par le schéma de Horner on trouve: $f(x)=(x-1)(x^2-x-2)$.

Tableau de signe

$x^2-x-2=0$ ssi x = -1 ou x = 2 (Δ=9)

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x-1		-		-	0	+		+	
x^2-x-2		+	0	-		-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Ainsi, $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[0;1]$ et $f(x)\leq 0$ pour tout $x\in[1;2]$.

$$A=\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^1\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}\quad \text{u.a.}$$

Question IX (compréhension)

$$I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin\left(\ln x\right)dx=\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}1\cdot\sin\left(\ln x\right)dx$$

Posons : $u(x)=\sin(\ln x)$ $u'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$

$v'(x)=1$ $v(x)=x$

$$=\left[x\cdot\sin(\ln x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}-\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos\left(\ln x\right)dx$$

Posons : $u(x)=\cos(\ln x)$ $u'(x)=\frac{-\sin(\ln x)}{x}$

$v'(x)=1$ $v(x)=x$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left[x\cdot\cos(\ln x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}+\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}-\sin\left(\ln x\right)dx$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I$$

Donc,

$$2I=e^{\frac{\pi}{2}}+1$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$$