Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

Section technique générale - Session 2012/2013 Septembre

Corrigé Mathématiques I

Question 1	2 + 6 + 2 = 10 points

Voir transmath TERM S page 92.

Question 2	4 + 2 = 6 points

1. $\ln\sqrt{2x-3} < \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$ C.E. : $2x-3>0$ et $6-x>0$ et $x>0$

$x > \frac{3}{2}$ $\quad x<6$

$D = \left]\frac{3}{2};6\right[$

$$\ln\sqrt{2x-3} < \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\ln(2x-3) + \tfrac{1}{2}\ln x < \ln(6-x)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\cdot x < (6-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x < 36 - 12x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 < 0 \qquad \Delta = 225 = 15^2$$

$$x_1 = \frac{-9-15}{2} = -12 \qquad x_2 = \frac{-9+15}{2} = 3$$

x		-12		3	
$x^2+9x-36$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left]\frac{3}{2};3\right[$

2. $2e^{-2x} - 3e^{-x} - 20 = 0$ $\quad D = \mathbb{R}$

Posons $y = e^{-x}$, alors l'équation devient : $2y^2 - 3y - 20 = 0$ $\quad \Delta = 169 = 13^2$

$$y_1 = \frac{3-13}{4} = -\tfrac{5}{2} \text{ impossible} \qquad y_2 = \frac{3+13}{4} = 4$$

Par suite $e^{-x} = 4 \Leftrightarrow x = -\ln 4$.

$S = \{-2\ln 2\}$

Question 3 — 2 + 1 = 3 points

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+3\right)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\overset{\to+\infty}{-2x}}}_{\to+\infty}\right)\\ &= -\infty \quad \text{pas d'A.H.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+3\right)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{\overset{\to-\infty}{-2x}}}_{\to0}\right) \quad \text{f.i. } \infty\cdot 0\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{e^{2x}}+3e^{-2x}\right) \quad \text{posons } y=2x \Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}y \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } x\to+\infty,\text{ alors } y\to+\infty\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{\underbrace{\frac{e^y}{y}}_{\to+\infty}}}_{\to0}+\underbrace{3e^{-y}}_{\to0}\right)\\ &= 0 \quad \text{A.H. } d: y=0\end{aligned}$$

2. On étudie le signe de $f(x)-0=\left(\frac{1}{2}x+3\right)e^{-2x}$.

Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-2x}>0$, le signe de $\left(\frac{1}{2}x+3\right)e^{-2x}$ est celui de $\frac{1}{2}x+3$.

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$\frac{1}{2}x+3$	$-$	0	$+$
Position de $\mathscr{C}$ p.r. à d	$d/\mathscr{C}$	$\mathscr{C}$ coupe d	$\mathscr{C}/d$

Question 4 — 8 points

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x$.

Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a : $\quad T_a: y=e^a+e^a(x-a)$.

Or $\quad A\left(0;\frac{1}{2}\right)\in T_a \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}=e^a-ae^a$

$\quad\Leftrightarrow\quad e^a-ae^a-\frac{1}{2}=0$

Soit $g(x)=e^x-xe^x-\frac{1}{2}$, $\quad D_g=\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^x}_{\to0}-\underbrace{xe^x}_{\to0}-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^x}_{\to+\infty}-\underbrace{xe^x}_{\to-\infty}-\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{f.i. } \infty-\infty\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{e^x}_{+\infty}\underbrace{(1-x)}_{-\infty}-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = e^x(1-x)-e^x = e^x(1-x-1) = -xe^x$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Sur chacun des intervalles $\left]-\infty;0\right[$ et $\left[0;+\infty\right[$, la fonction g est continue et strictement monotone.

En plus : $0 \in g\left(\left]-\infty;0\right[\right) = \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ et $0 \in g\left(\left[0;+\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{2};-\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Conclusion: $\mathscr{C}$ admet exactement deux tangentes passant par $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Question 5 (2 + 2) + (1 + 2 + 2 + 2 + 2) = 13 points

I. 1. $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\Big(\underbrace{x^2}_{\to 0} - 2\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\Big(\underbrace{x^2}_{\to +\infty} - 2\underbrace{\ln x}_{\to +\infty}\Big) \text{ f.i. } \infty - \infty$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\Bigg(\underbrace{x}_{\to +\infty}\underbrace{\Big(x - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\Big)}_{\to +\infty}\Bigg) = +\infty$$

2. $$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\quad g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{\underbrace{x}_{>0}}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $\underbrace{x=-1}_{\notin D_{g'}}$, le signe de g' est celui de x^2-1.

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le td.v., on a $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ g(x) \geq 1 > 0$.

II. 1. $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\Bigg(\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\overbrace{1+\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}}}_{\to -\infty}\Bigg) = -\infty$$

$\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

2. $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to+\infty}+\frac{\overbrace{1+\ln x}^{+\infty}}{\underbrace{x}_{+\infty}}\right) \quad \text{f.i. } \tfrac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to+\infty}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 0$$

Donc la droite Δ d'équation $y=\frac{x}{2}$ est A.O. à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. Posons $\varphi(x)=f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1+\ln x}{x}$ pour $x\in\left]0;+\infty\right[$.

$$\varphi(x)=0 \iff 1+\ln x=0$$
$$\iff x=e^{-1}$$

Donc $\mathscr{C}\cap\Delta=\left\{A\left(e^{-1};f\left(e^{-1}\right)\right)\right\}=\left\{A\left(e^{-1};\frac{e^{-1}}{2}\right)\right\}$.

Le signe de $\varphi(x)$ est celui de $1+\ln x$: $\varphi(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq e^{-1}$ et $\varphi(x)\leq 0\Leftrightarrow x\leq e^{-1}$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	
Position de $\mathscr{C}$ p.r. à Δ		$\Delta/\mathscr{C}$		$\mathscr{C}/\Delta$	

4. $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1-\ln x}{x^2}$$

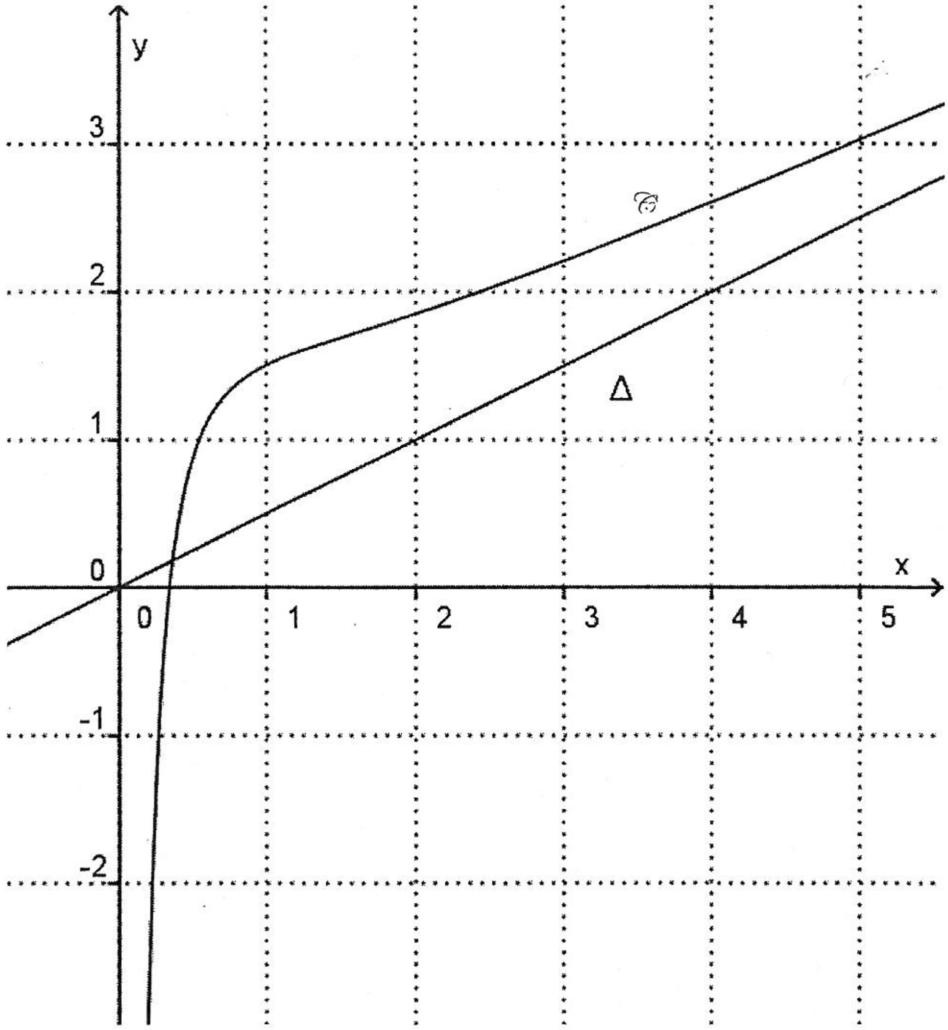
$$= \frac{x^2-\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{2x^2}$$

Le signe de f' est donc le même que celui de g, c.-à-d. $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)>0$.

x	0		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5.



Question 6	2 + 2 + 3 = 7 points

1. Théorème de Pythagore dans le triangle BHK rectangle en K :

$$\begin{aligned} BH^2 &= HK^2 + BK^2 \\ &= (4-x)^2 + 9 \end{aligned}$$

Donc $BH = \sqrt{(4-x)^2 + 9}$

2. Temps, en heures, mis par le tracteur pour aller du point A au point B :

$$\begin{aligned} \frac{x}{40} + \frac{\sqrt{(4-x)^2+9}}{20} &= \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 25}}{40} \\ &= t(x) \end{aligned}$$

3. $\forall x \in [0;4]$, $$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{1}{40}\left(1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right) \\ &= \frac{1}{40}\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+25} + 2x - 8}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t'(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-8x+25}+2x-8 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-8x+25} \geq 8-2x \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-8x+25 \geq (8-2x)^2, \quad 8-2x \geq 0 \text{ sur } [0;4] \\
&\Leftrightarrow \quad -3x^2+24x-39 \geq 0 \quad \Delta = 108 = \left(6\sqrt{3}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-24-6\sqrt{3}}{-6} & x_2 &= \frac{-24+6\sqrt{3}}{-6} \\
&= 4+\sqrt{3} \notin [0;4] & &= 4-\sqrt{3} \in [0;4]
\end{aligned}
$$

x	0		$4-\sqrt{3}$		4
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
t	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$t\left(4-\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

Donc le point $H \in [AK]$ cherché est tel que $AH = 4-\sqrt{3}$ km.

Question 7 3 + (1 + 4 + 1) + 4 = 13 points

A. $\forall x \in [0;2],$
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x+\sqrt{x^2+5}} \\
&= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+5}+x}}{\sqrt{x^2+5}\cdot\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}
\end{aligned}
$$

Donc
$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\,dx &= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\right]_0^2 \\
&= \ln 5 - \tfrac{1}{2}\ln 5 \\
&= \tfrac{1}{2}\ln 5
\end{aligned}
$$

B. 1.
$$
\begin{aligned}
I+J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2x)\cos^2 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2x)\sin^2 x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2x)\,dx \\
&= \left[x+x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi^2}{16}
\end{aligned}
$$

2. $$\begin{aligned} I-J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2x)\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2x)\sin^2 x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2x)\cos(2x)\,dx \qquad \left| \begin{array}{ll} u(x)=1+2x & v'(x)=\cos(2x) \\ u'(x)=2 & v(x)=\frac{1}{2}\sin(2x) \end{array} \right. \\ &= \left[\tfrac{1}{2}(1+2x)\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{\pi}{4}+\left[\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. $I=\frac{1}{2}\left(I+J+I-J\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{32}$

$J=\frac{1}{2}\left(I+J-(I-J)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{32}$

C. $\forall x\in\,]0;+\infty[:\quad g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1,\quad g(x)\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1.$

$$\begin{aligned} A &= -\int_{e^{-1}}^{1}\frac{\ln x}{x}\,dx+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_{e^{-1}}^{1}+\tfrac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8} \\ &= \tfrac{5}{8}\text{ u.a.} \end{aligned}$$