Corrigé de l'épreuve de mathématiques I

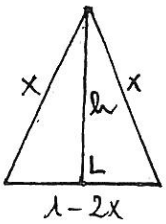
Question 1 (4+2+2 = 8p.)

1) th. 3 p. 88

2) th. 3 p. 118

3) th. 5 p. 150

Question 2 (4+3 = 7p.)

1) 

$x \in \left] \frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right[$

La base du triangle isocèle mesure $1-2x$ (en dm).
Soit h la mesure de la hauteur en dm.
La hauteur partage le triangle isocèle en deux triangles rectangles symétriques.

Aire du triangle : $\mathcal{A} = \dfrac{(1-2x)\cdot h}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\cdot h$

Or (Pythagore) : $h^2 = x^2 - \left(\dfrac{1-2x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{4}\left(1-4x+4x^2\right)$

$= -\frac{1}{4} + x \quad > 0$

Donc $h = \sqrt{-\frac{1}{4}+x}$ et $\mathcal{A}(x) = \left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot\sqrt{x-\frac{1}{4}}$.

2) $\forall x \in \left] \frac{1}{4} ; \frac{1}{2} \right[: \mathcal{A}'(x) = -\sqrt{x-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}$

$$= \frac{-2\left(x-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{-3x+1}{\underbrace{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}_{>0}}$$

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$
$\mathcal{A}'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$\mathcal{A}$	‖	↗	$\mathcal{A}(1/3)$ MAX	↘	‖

L'aire est donc maximale pour $x = \frac{1}{3}$ dm (triangle équilatéral).

Question 3 (3 p.)

T_0 a pour équation $y = -4x+1$ ssi $f'(0) = -4$ et $f(0) = 1$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \dfrac{(2x+a)(x+1) - (x^2+ax+b)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2x^2 + 2x \cancel{+ax} + a - x^2 \cancel{-ax} - b}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + a - b}{(x+1)^2}$$

Donc: $\begin{cases} f'(0) = -4 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -4 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}}$

Question 4 (2p.)

$e^x + 6e^{-x} = 5$; $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x + 6e^{-x} = 5 \quad | \cdot e^x > 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 6 = 5e^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0 \qquad (E)$

Posons $e^x = y$ $(y > 0)$.

$y^2 - 5y + 6 = 0$; $\Delta = 1$; $y_1 = 2$; $y_2 = 3$

Donc : $(E) \Leftrightarrow e^x = 2$ ou $e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$

$S = \{\ln 2 ; \ln 3\}$

Question 5 (2+3+4+3 = 12p.)

1) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \Big(\underbrace{x+1}_{\to 0} - \underbrace{\ln \overbrace{\left(\frac{x+1}{x+3}\right)}^{\to 0^+}}_{\to -\infty} \Big) = +\infty$ $\boxed{\text{A.V.: } x = -1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{x+1}_{\to +\infty} - \underbrace{\ln \overbrace{\left(\frac{\cancel{x}+1}{\cancel{x}+3}\right)}^{\to 1}}_{\to 0} \Big) = +\infty$ (pas d'A.H. en $+\infty$)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1) \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\ln \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{\to 1} \right] = 0$

Donc d est A.O. à C en $+\infty$.

<u>Position de C par rapport à d:</u>

$\forall x \in \left]-1; +\infty\right[: \quad f(x) - (x+1) = -\ln \frac{x+1}{x+3}$

$\forall x \in \left]-1; +\infty\right[: \quad x+1 < x+3 \quad | : (x+3) > 0$ sur $\left]-1; +\infty\right[$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{x+1}{x+3}}_{>0 \text{ sur } I} < 1$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow -\ln \frac{x+1}{x+3} > 0$$

C est donc au-dessus de d.

3) $\forall x \in I : \quad f'(x) = 1 - \frac{\cancel{x+3}}{x+1} \cdot \frac{x+3-(x+1)}{(x+3)^{\cancel{2}}}$

$$= 1 - \frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+4x+3-2}{(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+4x+1}{\underbrace{(x+1)(x+3)}_{>0}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+4x+1 = 0 \qquad \Delta = 12 \qquad x_1 = -2-\sqrt{3} < -1$: à écarter

$x_2 = -2+\sqrt{3} \simeq -0{,}27 \; (\in I)$

x	-1		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(-2+\sqrt{3})$ min	↗	$+\infty$

$f(-2+\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3} - \ln \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

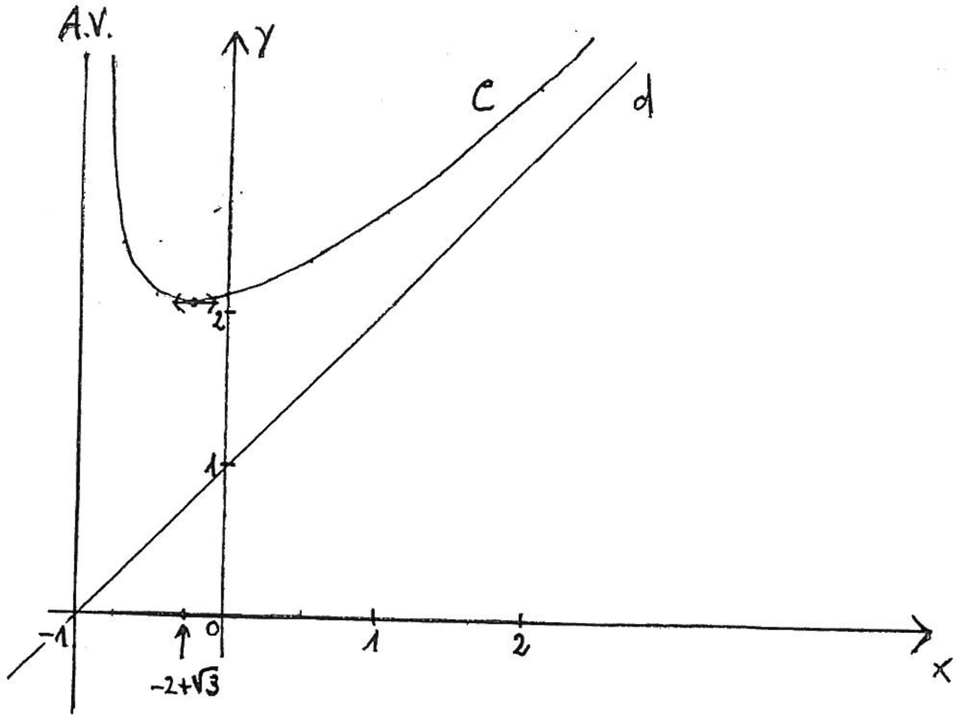
$= -1+\sqrt{3} - \ln \frac{-1+2\sqrt{3}-3}{-2}$

$= -1+\sqrt{3} - \ln(2-\sqrt{3})$

$\simeq 2{,}05$

4)

x	$-0{,}75$	$-0{,}5$	$\simeq -0{,}27$ $-2+\sqrt{3}$	0	$0{,}5$	1	2
$f(x)$	$\simeq 2{,}45$	$\simeq 2{,}11$	$\simeq 2{,}05$	$1+\ln 3$ $\simeq 2{,}1$	$\simeq 2{,}35$	$\simeq 2{,}69$	$\simeq 3{,}51$



Question 6 (3 + 1 + 7 = 11 p.)

1) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big[\underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{(1-x)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\Big] = \lim_{x\to-\infty}\Big(\underbrace{x}_{-\infty}+\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}-\tfrac{1}{2}\cdot\underbrace{2x\,e^{2x}}_{\to 0}\Big)$$

f.i.: « ∞ · 0 »

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big[\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\underbrace{(1-x)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}}_{\to-\infty}\Big] = \lim_{x\to+\infty}\Big[\underbrace{x}_{+\infty}\cdot\underbrace{\Big(1+\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\to -1}\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\Big)}_{\to-\infty}\Big] = -\infty$$

f.i.: « +∞ − ∞ »

ou: $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ldots = \lim_{x\to+\infty}\left(x+e^{2x}-xe^{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\Big[\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{\Big(\underbrace{\frac{x}{e^{2x}}}_{\to 0}+1-\underbrace{x}_{\to+\infty}\Big)}_{\to-\infty}\Big] = -\infty$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\cdot\underbrace{\frac{e^{2x}}{2x}}_{\to+\infty}} = 0\right)$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$: $$f'(x) = 1+(-1)\cdot e^{2x}+(1-x)\cdot 2e^{2x}$$
$$= 1-e^{2x}+2e^{2x}-2xe^{2x}$$
$$= 1+e^{2x}-2xe^{2x}$$
$$= 1+e^{2x}(1-2x)$$

3) <u>Signe de f' ?</u>

Posons $g(x) = 1 + e^{2x}(1-2x)$.

$D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad g'(x) = 2e^{2x}(1-2x) + e^{2x}\cdot(-2)$

$\qquad\qquad\qquad = 2e^{2x}(1-2x-1)$

$\qquad\qquad\qquad = -4x\underbrace{e^{2x}}_{>0}$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = 1 + 1\cdot(1-0) = 2$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1+\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\underbrace{(1-2x)}_{\to+\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{2xe^{2x}}_{\to 0}\right) = 1$$

f.i. : « $0\cdot\infty$ »

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\underbrace{\underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{(1-2x)}_{\to-\infty}}_{\to-\infty}\right] = -\infty$$

$\forall x \in]-\infty ; 0] : g(x) > 0$

g est continue et strictement $\searrow$ sur $]0;+\infty[$: $g(]0;+\infty[) =]-\infty;2[$.

$0 \in]-\infty;2[$, donc $g(x) = 0$ a exactement une solution α dans $]0;+\infty[$.

$\left.\begin{array}{l} g(0) > 0 \\ g(1) = 1-e^2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha < 1$

$\left.\begin{array}{l} g(0{,}6) \simeq 0{,}34 > 0 \\ g(0{,}7) \simeq -0{,}62 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

D'où : <u>tableau de variations de f</u> :

x	$-\infty$		$0{,}6$ α $0{,}7$		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$ MAX	$\searrow$	$-\infty$

$(f(\alpha) \simeq 1{,}9)$

Question 7 (2p.)

* tableau de variations d'une primitive de f_1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$		$+$	0	$-$	
F		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

D'après ce tableau de variations, F peut être F_4 ou F_5.
Comme f_1 est définie par $f_1(x) = ax$ $(a \neq 0)$, F est une fonction polynôme du 2^{nd} degré et sa représentation graphique est une parabole.
F_5 est donc une primitive de f_1.

* On a un tableau de variations analogue pour une primitive de f_3.
F_4 doit donc être une primitive de f_3.

* Par conséquent, F_6 est une primitive de f_2.

Question 8 (3 + 1 = 4p.)

1) $$I + J = \int_0^{\pi/8} \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\, dx = \int_0^{\pi/8} 1\, dx = \left[x \right]_0^{\pi/8} = \frac{\pi}{8}$$

$$I - J = \int_0^{\pi/8} \frac{\cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{2\cos 2x - 2\sin 2x}{\sin 2x + \cos 2x}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\ln |\sin 2x + \cos 2x| \right]_0^{\pi/8}$$
$$= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}\right) - \ln (\sin 0 + \cos 0) \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left(\ln \sqrt{2} - \underbrace{\ln 1}_{0} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \ln 2$$

2) $$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{8} & (1) \\ I - J = \frac{1}{4} \ln 2 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) : $2I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2 \iff \underline{I = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\ln 2}$

(1) − (2) : $2J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 \iff \underline{J = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\ln 2}$

Question 9 (4p.)

$$K = \int_0^{-\pi} e^{-x/2} \sin x \, dx$$

Posons : $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^{-x/2}$
$u'(x) = \cos x$, $v(x) = -2e^{-x/2}$

$$= \left[-2e^{-x/2} \sin x\right]_0^{-\pi} + 2\int_0^{-\pi} e^{-x/2} \cos x \, dx$$

$$= 0 + 2\int_0^{-\pi} e^{-x/2} \cos x \, dx$$

Posons : $u_1(x) = \cos x$, $v'(x) = e^{-x/2}$
$u_1'(x) = -\sin x$, $v(x) = -2e^{-x/2}$

$$= 2\left(\left[-2e^{-x/2}\cos x\right]_0^{-\pi} - 2\underbrace{\int_0^{-\pi} e^{-x/2} \sin x \, dx}_{K}\right)$$

D'où : $K = -4\left(-e^{\pi/2} - 1\right) - 4K$

$\Leftrightarrow 5K = 4\left(e^{\pi/2} + 1\right)$

$\Leftrightarrow \underline{K = \frac{4}{5}\left(e^{\pi/2} + 1\right)}$

Question 10 (3+4 = 7 p.)

1)
$$\begin{array}{rr|l} x^2 + 2x & & -x+3 \\ \hline -x^2 + 3x & & -x-5 \\ \hline 5x & & \\ -5x + 15 & & \\ \hline 15 & & \end{array}$$

$\forall x \in]-\infty ; 3[: f(x) = -x - 5 + \frac{15}{3-x}$

D'où : $\begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = 15 \end{cases}$

$\forall x \in]-\infty ; 3[: F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 15 \ln|3-x| = -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 15\ln(3-x)$

2) Aire du domaine gris :

$$\mathcal{A} = -\int_{-1}^{2} g(x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+1)\ln(3-x) \, dx$$

Posons : $u(x) = \ln(3-x)$, $v'(x) = x+1$
$u'(x) = \frac{-1}{3-x}$, $v(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(3-x)\right]_{-1}^{2} + \int_{-1}^{2} \frac{\frac{x^2}{2} + x}{3-x} \, dx$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\ln 4 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \frac{x^2 + 2x}{3-x} \, dx$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2 - 5x - 15\ln(3-x)\right]_{-1}^{2}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\left(-2 - 10 + \frac{1}{2} - 5 + 15\ln 4\right)$$

$$= 16\ln 2 - \frac{33}{4}$$

$$\simeq 2{,}84 \text{ u.a.}$$