Question I (4+5 = 9 points) *théorie*

a) voir la démonstration du théorème 7 p:90 – Livre Transmath TermS
b) voir la démonstration du théorème 9 p:92 – Livre Transmath TermS

Question II ((2+3)+(3+2+2+3) = 15 points) *techniques de calcul*

1) $g(x)=x^2-2\cdot\ln x \qquad D_g=]0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x^2}_{\to 0}-2\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\right)$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\underbrace{x^2}_{\to +\infty}-2\underbrace{\ln x}_{\to +\infty}\right) \quad F.I.\text{"}\infty-\infty\text{"}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\underbrace{x^2}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1-2\underbrace{\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}\right]=+\infty$

b) $\forall x\in]0;+\infty[$

$g'(x)=2x-2\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{2x^2-2}{x}$

$=\dfrac{2(x-1)\overbrace{(x+1)}^{>0}}{\underbrace{x}_{>0}}$

x	0		1		$+\infty$
g'	‖	-	0	+	
g	‖ $+\infty$	↘	Min 1	↗	$+\infty$

$g(1)=1-2\ln 1$
$=1$

D'après le T.V. de g on a : $\forall x\epsilon]0;+\infty[: g(x)\geq 1>0$.

On en déduit donc que la fonction g est strictement positive sur $]0;+\infty[$.

2) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ln(x)}{x} \quad ; \quad D_f=]0;+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\overbrace{x}^{\to 0^+}}{2}+\underbrace{\frac{\overbrace{1+\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}}}_{\to -\infty}\right)$

$=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\overbrace{x}^{\to +\infty}}{2}+\underbrace{\frac{1+\ln x}{x}}_{F.I.\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{\overbrace{x}^{\to +\infty}}{2}+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right]=+\infty$

C_f admet une A.V. d'équation x=0 et C_f n'admet pas d'A.H. en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right]$$

$$=0$$

La droite (d) d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est A.O. à C_f en $+\infty$.

<u>Position de C_f par rapport à *(d)*:</u>

$\forall x\in D_f : f(x)-y=\dfrac{1+\ln x}{\underbrace{x}_{>0}}$

$\forall x\in D_f$:

$1+\ln x>0$	$1+\ln x\le 0$
$\Leftrightarrow \ln x>-1$	$\Leftrightarrow \ln x\le -1$
$\Leftrightarrow \quad x>e^{-1}$	$\Leftrightarrow \quad x\le e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f(x)-y$	-	0	+
Position de C_f par rapport à *(d)*	$\frac{(d)}{C_f}$		$\frac{C_f}{(d)}$

C_f et (d) se coupent

c) $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{-\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-2\ln x}{2x^2}$$

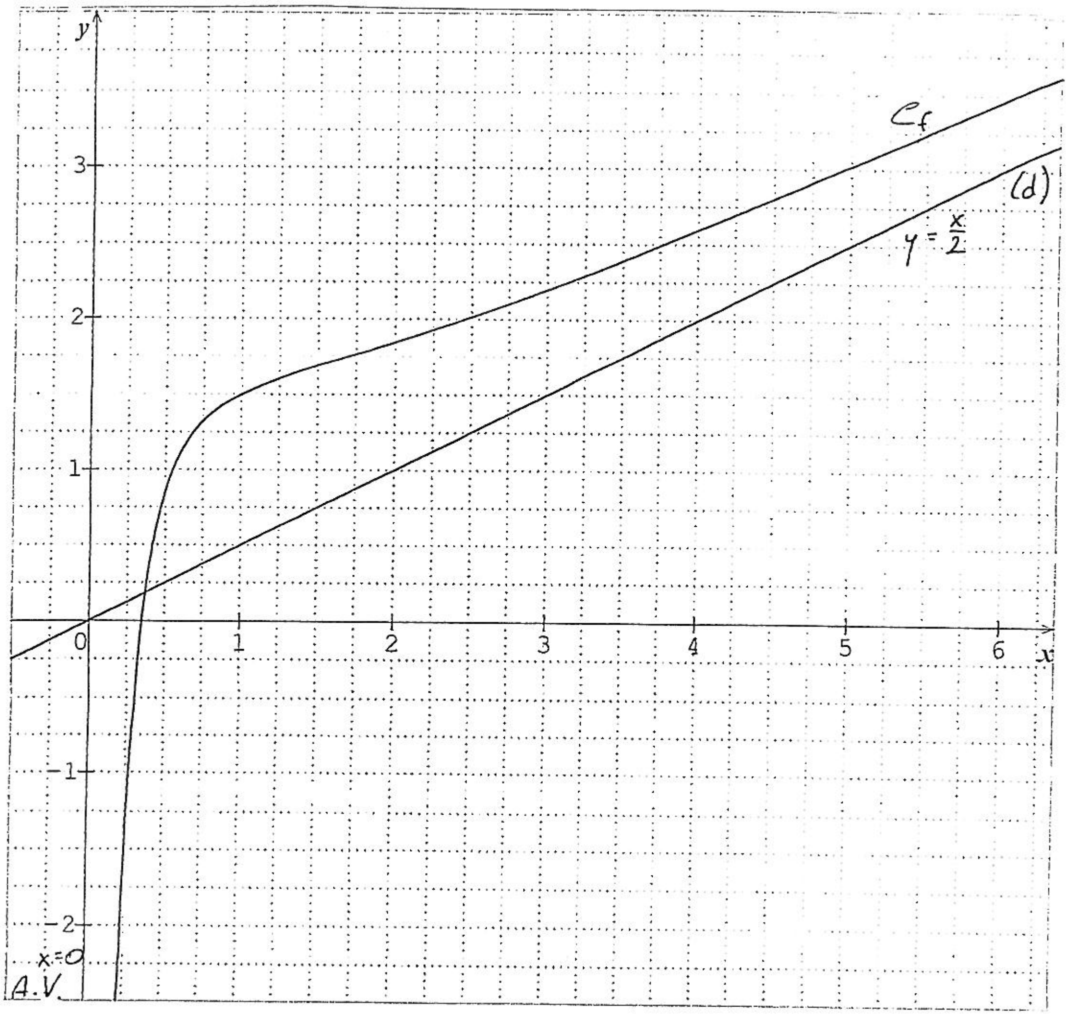
$$=\frac{\overbrace{g(x)}^{>0\text{ par le point 1b)}}}{\underbrace{2x^2}_{>0}}$$

x	0	$+\infty$
F'	+	
f	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

d)

x	¼	½	1	1,5	2	2,5	3	4	4,5	5
$f(x)$	-1,4	0,9	1,5	1,7	1,8	2	2,2	2,6	2,8	3

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}\approx 0,18$$



Question III (4 points) *techniques de calcul*

$$\ln\left(\frac{x+3}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln x+\ln 3)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right)=\ln(3x)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+3}{2}\right)^2=\ln(3x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{2}\right)^2=3x$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9=12x$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=3\in E$$

$$S=\{3\}$$

$C.E.$:

1) $\frac{x+3}{2}>0$

$\Leftrightarrow x>-3$

2) $x>0$

$E=]0;+\infty[$

Question IV ((1+1+2)+(8+2) = 14 points) *techniques de calcul*

---

(1) (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1-2t}\,dt = -\frac{1}{2}\Big[\ln|\underbrace{1-2t}_{<0}|\Big]_1^2 = -\frac{1}{2}\Big[\ln(2t-1)\Big]_1^2 = \boxed{-\frac{\ln 3}{2}}$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{3\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}\Big[e^{3\sqrt{t}}\Big]_1^4 = \frac{2}{3}\left(e^6 - e^3\right) = \boxed{\frac{2}{3}\,e^3\left(e^3-1\right)}$

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin^3(\pi t)\,dt &= \int_0^1 \sin(\pi t)\cdot\Big(1-\cos^2(\pi t)\Big)\,dt\\ &= \int_0^1 \Big(\sin(\pi t) - \sin(\pi t)\cdot\cos^2(\pi t)\Big)\,dt\\ &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t) + \frac{1}{3\pi}\cos^3(\pi t)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi}\\ &= \boxed{\frac{4}{3\pi}}\end{aligned}$$

(2) (a) Par définition :

$$F(x) = \int_{e^{-1}}^{x} \Big(\ln^2(t) - 1\Big)\,dt$$

Intégrons par parties :

$$\left|\begin{array}{ll} u_1(t) = \ln^2(t) - 1 & u_1'(t) = 2\cdot\ln(t)\cdot\frac{1}{t}\\ v_1'(t) = 1 & v_1(t) = t\end{array}\right.$$

Et donc :

$$F(x) = \Big[t\left(\ln^2(t)-1\right)\Big]_{e^{-1}}^{x} - 2\int_{e^{-1}}^{x}\ln(t)\,dt$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = x\left(\ln^2(x)-1\right) - 2\underbrace{\int_{e^{-1}}^{x}\ln(t)\,dt}_{G(x)}$$

Intégrons à nouveau par parties :

$$\left|\begin{array}{ll} u_2(t) = \ln(t) & u_2'(t) = \frac{1}{t}\\ v_2'(t) = 1 & v_2(t) = t\end{array}\right.$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}G(x) &= \big[t\,\ln(t)\big]_{e^{-1}}^{x} - \int_{e^{-1}}^{x} 1\,dt\\ &= \big[t\,\ln(t)\big]_{e^{-1}}^{x} - \big[t\big]_{e^{-1}}^{x}\\ &= x\,\ln(x) + e^{-1} - x + e^{-1}\\ &= x\,\ln(x) - x + 2\,e^{-1}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
F(x) &= x\left(\ln^2(x) - 1\right) - 2\left(x\ln(x) - x + 2\,e^{-1}\right) \\
&= x\left(\ln^2(x) - 1\right) - 2x\ln(x) + 2x - 4\,e^{-1} \\
&= x\left(\ln^2(x) - 2\,\ln(x) + 1\right) - \frac{4}{e} \\
&= x\left(\ln(x) - 1\right)^2 - \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

(b) Notons $\mathcal{D}$ le domaine en question. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{D}) &= \int_{e^{-2}}^{e-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{e^{-1}}^{e} \left(-f(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{e^{-1}}^{e} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{e}^{e^{-1}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F\left(e^{-1}\right) - F\left(e^{-2}\right) + F\left(e^{-1}\right) - F(e) \\
&= 2\,F\left(e^{-1}\right) - F\left(e^{-2}\right) - F(e) \qquad \text{(avec } F\left(e^{-1}\right) = 0 \text{ par définition de } F\text{)}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = 2\cdot 0 - \left(\frac{9}{e^2} - \frac{4}{e}\right) - \left(-\frac{4}{e}\right) = \boxed{\frac{8e-9}{e^2}}\ \text{u.a.}$$

Question V (0,5+4,5+3 = 8 points) *optimisation*

a) Accepter une des réponses : $R\epsilon]0;+\infty[$ ou $\cancel{R\epsilon\left]0;\sqrt{\frac{a}{\pi}}\right[}$

b) Volume de la boîte : a (a est une constante strictement positive)

$$V(R) = a$$
$$\Leftrightarrow \pi R^2 h = a$$
$$\Leftrightarrow \quad h = \frac{a}{\pi R^2} \qquad (1)$$

$$\mathcal{A}(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R h$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R \frac{a}{\pi R^2} \text{ (on remplace (1) dans l'égalité)}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{A}(R) = 2\pi R^2 + \frac{2a}{R}$$

c) $\forall R\epsilon]0;+\infty[$ resp. $\cancel{\forall R\epsilon\left]0;\sqrt{\frac{a}{\pi}}\right[}$:

$$\mathcal{A}'(R) = 4\pi R - \frac{2a}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 2a}{\underbrace{R^2}_{>0}}$$

$$\mathcal{A}'(R) > 0 \Leftrightarrow R^3 > \frac{a}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow R > \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

T.V.

R	0		$\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$		$+\infty$ resp. $\cancel{\sqrt{\frac{a}{\pi}}}$
$\mathcal{A}'$	‖	-	0	+	‖
$\mathcal{A}$	‖	$\searrow$	Min $S(\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}})$	$\nearrow$	‖

L'aire $\mathcal{A}$ est minimale lorsque le rayon R vaut $\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$ $(u.\ell.)$

Question VI (2,5 + 7,5 = 10 points) *compréhension*

a) T.V.

x	$-\infty$		0		1		$\approx 2{,}6$		$+\infty$
f'		$-$	0		(5)	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	Min	$\nearrow$	(5)	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

b) Informations lisibles sur le graphique:

$$f'(0) = 0$$
$$f'(1) = 5$$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

$f'(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \boldsymbol{c = 0}$

$f'(1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \qquad \Leftrightarrow 3a + 2b = 5$ (1)

De plus, d'après l'énoncé :

$f(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 2 \qquad \Leftrightarrow \boldsymbol{d = 2}$

$f(1) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 5 \quad \Leftrightarrow a + b + 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 3$ (2)

En remplaçant (2) dans (1) :

$3a + 2(3 - a) = 5 \qquad \Leftrightarrow 3a + 6 - 2a = 5 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{a = -1}$

En remplaçant dans (2) : $\boldsymbol{b = 4}$

Donc la fonction cherchée est définie par $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 2$

Théorie (8-10 points permis) : 9 points
Techniques de calcul (29-35 points permis) : 15 + 4 +14 = 33 points
Compréhension (10-12 points permis) : 10 points
Optimisation (7-9 points permis) : 8 points