Mathématiques I 21 mai 2012

Question 1

1) voir livre p. 88 (thm 3) 2) voir livre p. 122 (thm 7)

Question 2

$f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$ $D_f =]-\infty ; \frac{1}{4}] \cup [1 ; +\infty[$

1) $d_1 : y = 4x - \frac{5}{4}$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_{d_1}) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2-5x+1} - 4x + \frac{5}{4}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\sqrt{4x^2-5x+1}}_{+\infty} - \underbrace{2x}_{+\infty} + \frac{5}{4}\right) \quad (\text{fi : "}\infty - \infty\text{"})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 5x + 1 - (2x - \frac{5}{4})^2}{\sqrt{4x^2-5x+1} + (2x - \frac{5}{4})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{4x^2} - \cancel{5x} + 1 - \cancel{4x^2} + \cancel{5x} - \frac{25}{16}}{\sqrt{4x^2-5x+1} + (2x - \frac{5}{4})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{9}{16}}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{4x^2-5x+1}}_{+\infty} + \underbrace{(2x - \frac{5}{4})}_{+\infty}}_{\to +\infty}} = 0 \Rightarrow d_1 \text{ est A.O. à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty$$

2) $$\lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{2x}_{-\infty} + \underbrace{\sqrt{4x^2-5x+1}}_{+\infty}\right) \quad (\text{f.i : "}-\infty + \infty\text{"})$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - 5x + 1)}{2x - \sqrt{4x^2-5x+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} + 5x - 1}{2x - \sqrt{4x^2-5x+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5x - 1}{2x - \underbrace{|x|}_{=-x, \text{ car } x<0}\sqrt{4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(5 - \frac{1}{x})}{\cancel{x}(2 + \underbrace{\sqrt{4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}_{\to 2})} = \frac{5}{4} \Rightarrow AH : y = \frac{5}{4} \text{ en } -\infty$$

3) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x + \sqrt{4x^2-5x+1} - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{\sqrt{4x^2-5x+1}}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left[2 + \frac{4x^2 - 5x + 1}{(x-1)\sqrt{4x^2-5x+1}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left[2 + \frac{4\cancel{(x-1)}(x - \frac{1}{4})}{\cancel{(x-1)}\sqrt{4x^2-5x+1}}\right]$$

[Posons $4x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} < \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{matrix}$]

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(2 + \underbrace{\frac{\overset{\to 3}{4x-1}}{\sqrt{4x^2-5x+1}}}_{\downarrow 0^+}\right) \to +\infty$$

$$= +\infty$$

f n'est pas dérivable en $x = 1$ et $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en $x = 1$

Question 3

1) $2\ln(2x-1) - \ln(5-2x) \leq \frac{1}{2}\ln 4$

cond : $2x-1 > 0$ et $5-2x > 0$

$\iff x > \frac{1}{2}$ et $x < \frac{5}{2}$ $\qquad$ $E = \left]\frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right[$

$x \in E$ $\ln(2x-1)^2 \leq \ln\sqrt{4} + \ln(5-2x)$

$\iff \ln(2x-1)^2 \leq \ln[2(5-2x)]$

$\iff (2x-1)^2 \leq 2(5-2x)$

$\iff 4x^2 - \cancel{4x} + 1 \leq 10 - \cancel{4x}$

$\iff 4x^2 - 9 \leq 0$

$\iff (2x-3)(2x+3) \leq 0$

$\iff x \in \left[-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right]$

E

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$	
$4x^2-9$	+	0	−	‖	−	0	+	‖	+

D'où : $S = \left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$

2) $e^{2x} + e^x = 6$ $\qquad$ posons $y = e^x > 0$

$y^2 + y - 6 = 0$ et $y = e^x$

$(y+3)(y-2) = 0$ et $y = e^x$

$(\underbrace{y = -3}_{<0}$ ou $y = 2)$ et $y = e^x$

à écarter $\qquad e^x = 2$

$x = \ln 2$ $\qquad$ $S = \{\ln 2\}$

Question 4

1) $g(x) = 2x^3 + 3 - 6\ln x$ $\qquad$ $D_g =]0 ; +\infty[= D_{g'}$

$\forall x \in D_g : g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} = \frac{6x^3-6}{x} = \frac{6(x^3-1)}{\underset{>0}{x}}$ g' a le même signe que $x^3 - 1$

$g'(x) = 0 \iff 6(x^3-1) = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	−	0	+	
g	‖	↘	5	↗	

$g(1) = 2\cdot 1^3 + 3 - 6\underbrace{\ln 1}_{0} = 5$

b) D'après le T. V. de g :
$g(x) \geq 5 \quad \forall x \in D_g$ donc $g(x) > 0, \ \forall x \in D_g$

2) $f(x) = \frac{2x}{3} - 1 + \frac{\ln x}{x^2}$ $\qquad D_f =]0 ; +\infty[= D_{f'}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{2x}{3}}_{0} - 1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{-\infty}\right) = -\infty \Rightarrow$ AV : $x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\underbrace{\frac{2x}{3}}_{+\infty} - 1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{0}\right) = +\infty$ (pas d'A.H. en $+\infty$)

b) $\Delta : y = \frac{2x}{3} - 1$

posons $\delta(x) = f(x) - y_1 = \frac{2x}{3} - 1 + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2x}{3} + 1 = \frac{\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow \Delta$ est A.O. à C_f en $+\infty$

c) $\forall x \in D_f : \delta(x) = \frac{\ln x}{\underbrace{x^2}_{>0}} \Rightarrow \delta(x)$ a le même signe que $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$\delta(x)$	||	$-$	0	$+$	
		C_f en dessous de Δ	C_f coupe Δ	C_f au-dessus de Δ	

d) $\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2}{3} + \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$

$= \frac{2}{3} + \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln x}{3x^3} = \frac{g(x)}{3x^3}$

e) $\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{\overbrace{g(x)}^{>0}}{\underbrace{3x^3}_{>0}} > 0$

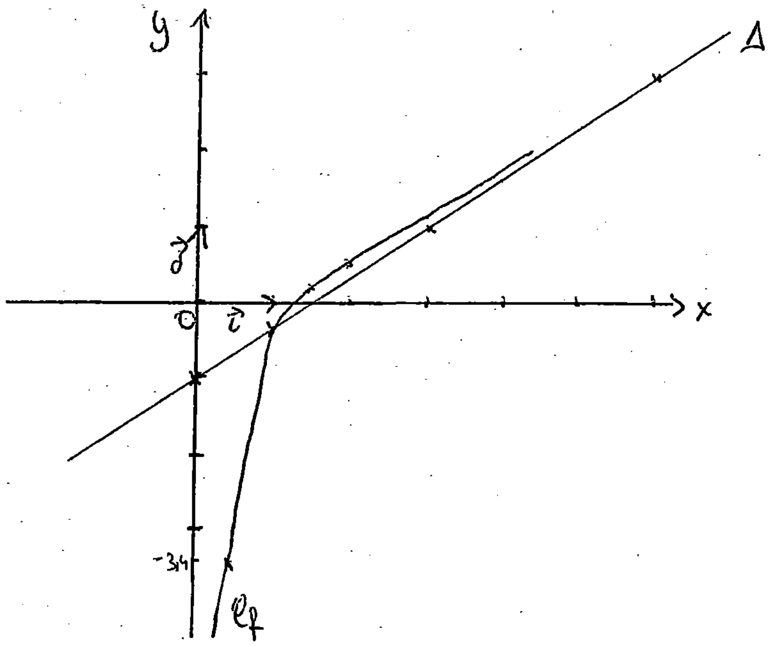
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f) $\Delta : y = \frac{2x}{3} - 1$

x	0	3	6
y	-1	1	3

x	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	3
$f(x)$	$-3{,}4$	$-0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}5$	$1{,}1$

val. approchées



Question 5

$f(x) = e^{-x} + 2x - 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{2x}_{\to +\infty} - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty} + \underbrace{2x}_{\to -\infty} - 1)$ (f.i : "$\infty - \infty$")

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \overbrace{e^{-x}}^{\to +\infty} \underbrace{(1 + 2\underbrace{xe^{x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x}}_{\to 0})}_{\to 1} = +\infty$

b) $\forall x \in D_f : f'(x) = -e^{-x} + 2$

$f'(x) \geq 0 \iff -e^{-x} + 2 \geq 0$

$\iff e^{-x} \leq 2$

$\iff -x \leq \ln 2$

$\iff x \geq -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$1 - 2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 - 1$
$= 1 - 2\ln 2$

c) $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\qquad f'(0) = \underbrace{-e^0}_{-1} + 2 = 1$

$T_0 : \underline{y = x}$ $\qquad f(0) = \underbrace{e^0}_{1} + 2\cdot 0 - 1 = 0$

2) Soit T_{x_0} la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0

$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$y = (-e^{-x_0}+2)(x-x_0) + e^{-x_0} + 2x_0 - 1$

$y = (-e^{-x_0}+2)x + e^{-x_0}\cdot x_0 \cancel{-2x_0} + e^{-x_0} \cancel{+2x_0} - 1$

$y = (-e^{-x_0}+2)x + e^{-x_0}(x_0+1) - 1$

$A(0;-3) \in T_{x_0} \iff e^{-x_0}(x_0+1) - 1 = -3$

$\iff e^{-x_0}(x_0+1) = -2$

Posons $\varphi(x) = e^{-x}(x+1)$ et résolvons l'éq $\varphi(x) = -2$:

$D_\varphi = \mathbb{R} = D_{\varphi'}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -e^{-x}\cdot x \cancel{-e^{-x}} \cancel{+e^{-x}} = -xe^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi'(x) \geq 0 \iff -x\underbrace{e^{-x}}_{>0} \geq 0 \iff x \leq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\underbrace{e^{-x}}_{0}\cdot\underbrace{(x+1)}_{+\infty}}_{\text{fi}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{+\infty}\underbrace{(x+1)}_{-\infty} = -\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\varphi(0) = e^0 \cdot 1 = 1$

φ est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, φ est str. $\nearrow$ sur $]-\infty, 0[$ et $\varphi(]-\infty;0[) =]-\infty;1[\ni -2$

$\Rightarrow \exists!\, \alpha \in]-\infty;0[$ tq $\varphi(\alpha) = -2$

Sur $]0;+\infty[$, $\varphi(x) > 0$, donc $\nexists\, \beta \in]0;+\infty[$ tq $\varphi(\beta) = -2$

Conclusion :

α est l'unique solution de $\varphi(x) = -2$, d'où il existe une seule tangente à $\mathcal{C}_f$ qui passe par $A(0;-3)$

(à savoir T_α avec $\alpha \simeq -1{,}47$)