Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

1re Session 2011

BRANCHE : MATHEMATIQUES I

DATE : Lundi 23 mai 2011 *DUREE : 2 H 15*

Exercice 1 *(4+2+2+3=11 points)*

1) a) Démontrer que pour tout réel a et tout réel b, $\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)$.

b) En déduire que : $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$ pour tout réel a

et $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ pour tout réel a et tout réel b

2) a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

Exercice 2 *(1+4+3+2=10 points)*

Soit f la fonction définie par $f(x)=x-\sqrt{x^2+3x-4}$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et démontrer que la droite *(d)* d'équation $y=2x+\dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

3) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier la réponse et interpréter graphiquement le résultat.

4) Calculer $f'(x)$ sur $D_{f'}$ à préciser.

Exercice 3 *(3+3+3+9=18 points)*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{x^2}\cdot\left(e^{-2}\right)^3\leq\dfrac{1}{e}\cdot e^{4x}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln x+\ln 2=\ln(3x+6)-\ln(x+1)$.

3) Résoudre l'équation différentielle $5y+2y'-3=0$ et déterminer la solution f telle que $f(0)=3$.

4) Montrer que l'équation $\ln x-x^2=-1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

La Commissaire du Gouvernement,

Exercice 4 *(2+2+4=8 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{4}}-3}{e^x-1}$.

~~C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.~~

1) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Montrer que C_f admet une asymptote horizontale (Δ) en $+\infty$ et déterminer son équation.

3) Etudier la position de C_f par rapport à (Δ) et indiquer les coordonnées de leur point d'intersection M.

Exercice 5 *(4+5+1+3=13 points)*

Soit f la fonction définie sur $I=]-1;+\infty[$ par $f(x)=\left[\ln(x+1)\right]^2$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Dresser le tableau de variations complet de f.

2) Démontrer qu'il existe deux tangentes (d) et (d') à la courbe C_f passant par le point $A(-1;3)$ et déterminer les abscisses des deux points en lesquels C_f admet une telle tangente. On notera (d) la tangente au point dont l'abscisse est négative.

3) C_f admet-elle une tangente horizontale ?

4) Construire dans un repère orthonormal (unité : 1cm) la courbe C_f et la tangente (d).