Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

Session 2008

BRANCHE : ***Mathématiques I***

DATE : 15 sept. 08 *DUREE :* 2h15

Question I (6 + 3 = 9 points)

1) Démontrer que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

En déduire que : $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$.

2) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Question II (3 + 3 + 4 + 2 = 12 points)

Soit f la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x + 2$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 2. Que peut-on en déduire graphiquement ?

3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]2; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Question III (4 + 4 + (3 + 2) = 13 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{36}{e^x} - 2e^x \geqslant 1$

3) Déterminer la limite de la fonction à l'endroit indiqué :

a) $f(x) = \frac{\cos 3x}{x - \frac{\pi}{6}}$ en $\frac{\pi}{6}$

b) $f(x) = x^3 \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right)$ en $-\infty$

Question IV (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{2x} + be^x$ où a et b désignent deux réels.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les réels a et b sachant que $\mathscr{C}_f$ admet au point $A\left(1; -\frac{e^2}{2}\right)$ une tangente horizontale.

La Commissaire du Gouvernement

Question V $(2 + 3 + 5 + 3 + 3 = 16$ points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -2x + 3 + \ln \dfrac{x}{x+1}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.

2) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -2x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$, puis étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$. Donner un encadrement de α d'amplitude égale à 10^{-1}.

5) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

Question VI $(1 + 1 + 1 + 3 = 6$ points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Justifier les affirmations suivantes :

a) $D_f =]-\infty; 0[$

b) $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

c) $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique.

d) f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

La Commissaire du Gouvernement