BRANCHE : Mathématiques I

DATE : 22 mai 2008 *DUREE : 2h 15 min*

I) 1. Démontrez le théorème suivant :

g est une fonction dérivable sur un intervalle J. u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et pour tout x de I, u(x) appartient à J. Alors la fonction f définie par $f(x)=g[u(x)]$ est dérivable sur I, et pour tout x de I, $f'(x)=g'[u(x)]\cdot u'(x)$

2. Calculez la dérivée de la fonction f définie sur IR par $f(x)=\cos^4(7x-9)$.

(9 + 2 = 11 points)

II) 1. Démontrez : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$.

2. On note f la fonction $x\mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x-2}\right)$.

a) Justifiez que son ensemble de définition D est $]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]2\ ;+\infty[$.
b) Étudiez les limites de f aux bornes de D. Interprétez graphiquement les résultats.
c) Étudiez les variations de f sur D et dressez le tableau de variation de f.
d) Démontrez d'abord, sans résoudre l'équation f(x) = 1, qu'elle admet une et une seule solution dans $]2\ ;+\infty[$. Résolvez ensuite l'équation f(x) = 1.
e) Tracez la courbe représentative de f .

(3 + 2 + 3 + 3 + 4 + 3 = 18 points)

III) f est la fonction définie sur $]-\infty\ ;0]\ \cup\ [2\ ;+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-2x}$.

a) Étudiez la limite de f en $-\infty$. Interprétez graphiquement le résultat déterminé.
b) Étudiez la limite de f en $+\infty$, puis prouvez que la droite d :y = 2x-1 est asymptote oblique à la courbe représentative C de f en $+\infty$.
c) Étudiez la position relative de C et de d sur $[2\ ;+\infty[$.
d) Étudiez la dérivabilité de f en 0. Interprétez graphiquement le résultat déterminé.

(2 + 3 + 4 + 3 = 12 points)

IV) 1. On donne la fonction f définie sur l'intervalle I =] 0 ; + ∞ [par $f(x)=\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{x}}$.

a) Étudiez les limites de f aux bornes de I. Interprétez graphiquement les résultats.
b) Étudiez les variations de f et dressez le tableau de variation de f.
c) Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative C de f en x = ln2.

(4 + 6 + 3 = 13 points)

V) Dans chacun des cas suivants, déterminez la limite de la fonction f à l'endroit indiqué.

a) $f(x)=x^4-e^x$ en $+\infty$
b) $f(x)=x^3\cdot\left(\ln x-x^2\right)$ en 0
c) $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1}$ en 0

(2 + 2 + 2 = 6 points)