EPREUVE ÉCRITE

Ministère de l'Education nationale
et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Division technique générale

Section (s): GE/GI

BRANCHE : MATHÉMATIQUES I

SESSION : sept. 07 DATE : 17.09.2007 DURÉE : 2h15

Question I ((5 + 2) + 4 = 11 points)

1) Démontrer que :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

2) Démontrer : la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée : $(\exp x)' = \exp x$

Question II (3 + 3 + 4 = 10 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

a) Calculer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ et démontrer que la droite d'équation $y = 2x - \dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

c) La fonction f est-elle dérivable en -1 ? en 4 ?

Question III (6 + 3 + 2 = 11 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(2-x) - \ln 3 \leqslant 2\ln(2x+1) - \ln(5x+6)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2e^x + 9 - 5e^{-x} > 0$

3) Résoudre l'équation différentielle : $3y' + 9y = 0$ et déterminer la solution f telle que $f(0) = 2$.

Le commissaire du Gouvernement,

Question IV $((1+2+1)+(2+4+3+2)=15$ points$)$

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x^2-\ln x$.

   a) Étudier les limites de g aux bornes du domaine de définition.

   b) Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.

   c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=-x+e+\dfrac{\ln x}{x}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

   a) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition et préciser les asymptotes éventuelles parallèles aux axes du repère.

   b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d dont on déterminera une équation, puis étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à d.

   c) Vérifier que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

   d) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

Question V $(2+4+3+1+3=13$ points$)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-(2x+3)e^{-x}$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

   a) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.

   b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   c) Montrer que $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-2;-1]$. Donner un encadrement de α d'amplitude égale à 10^{-1}.

   d) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

   e) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

Le commissaire du Gouvernement,