MATHÉ I - Mai 2007

II

$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3x - 4} \qquad I = [1; +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = "+\infty + \infty" = +\infty$

2) C_f admet une A.O. d'équation $y = 3x + \dfrac{3}{2}$ en $+\infty$ ssi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - y\right] = 0$

$$f(x) - y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} - \left(x + \frac{3}{2}\right) = \frac{\cancel{x^2} \cancel{+3x} - 4 \cancel{-x^2} \cancel{-3x} - \frac{9}{4}}{\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \left(x + \frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{-25}{4\underbrace{\sqrt{\quad}}_{\to +\infty}\left(\underbrace{x + 6}_{\to +\infty}\right)} = "\frac{-25}{+\infty}" = 0 \Rightarrow \text{A.O. d'équation } y = 3x + \frac{3}{2} \text{ en } +\infty$$

3) f est dérivable en 1 ssi $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = a \quad (a \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3x - 4} - 2}{x - 1} = \frac{2(x - 1) + \sqrt{(x - 1)(x + 4)}}{x - 1}$$

$$= 2 + \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 4)}{\cancel{(x - 1)}\sqrt{(x - 1)(x + 4)}} = 2 + \frac{x + 4}{\sqrt{(x - 1)(x + 4)}}$$

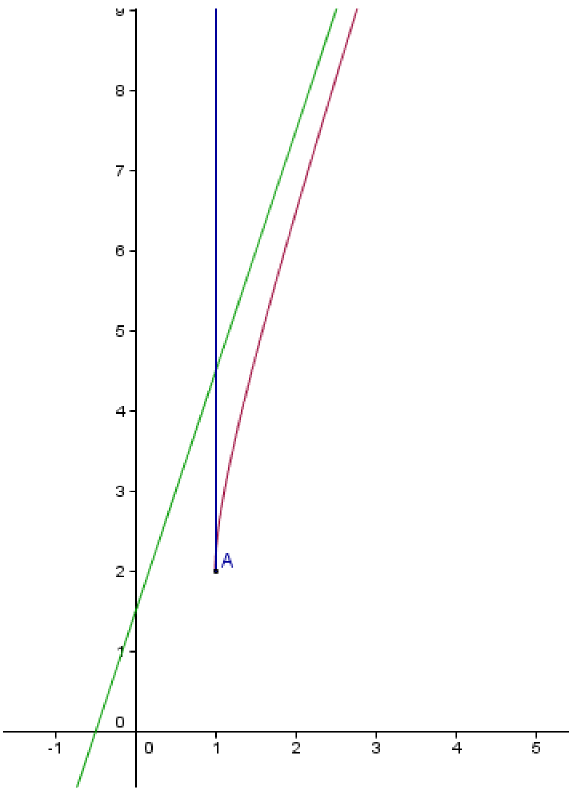
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left[2 + \frac{\overbrace{x + 4}^{\to 5}}{\sqrt{\left(\underbrace{x - 1}_{\to 0^+}\right)\left(\underbrace{x + 4}_{\to 5}\right)}}\right] = "2 + \frac{5}{0^+}" = +\infty$$

f n'est pas dérivable en 1; C_f admet une tangente verticale en $A(1; 2)$

4) $f'(x) = 2 + \dfrac{\overbrace{2x + 3}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{\quad}}_{>0}} > 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5)



12 points (1+3+3+3+2)

III. 1)

$$2\ln x-\ln 5=\ln(x+2)$$

C.E. $\quad x>0 \quad x>-2 \Rightarrow E=\left]0;+\infty\right[$

$$2\ln x-\ln 5=\ln(x+2)\Leftrightarrow \ln x^2=\ln 5+\ln(x+2)\Leftrightarrow \ln x^2=\ln\left[5(x+2)\right]$$

$\Leftrightarrow x^2=5(x+2)$ car la fonction ln est strict. $\uparrow$

$\Leftrightarrow x^2-5x-10=0 \qquad \Delta=25+40=65\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{65}$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{65}}{2}\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5-\sqrt{65}}{2}\notin E \\ x_2=\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}\in E\end{array}\right. \qquad \Rightarrow S=\left\{\frac{5+\sqrt{65}}{2}\right\}$$

2)

$$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{x}}$$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)-e^{x}\left(1-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{x}\right)^2}=\frac{e^{-x}+1-e^{x}+1}{\left(1+e^{x}\right)^2}=\frac{e^{-x}-e^{x}+2}{\left(1+e^{x}\right)^2}=\frac{-e^{2x}+2e^{x}+1}{\underbrace{e^{x}\left(1+e^{x}\right)^2}_{>0}}$$

$f'(x)$ a le signe de $-e^{2x}+2e^{x}+1$

$e^{x}=y\Rightarrow y>0$

$-y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow y^2-2y-1=0 \qquad \Delta=8 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2}$

$y=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}\left\langle \begin{array}{l} y_1=1-\sqrt{2} \\ y_2=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

$-y^2+2y+1>0 \Leftrightarrow y>0 \text{ et } y\in\left]1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right[\Leftrightarrow y\in\left]0;1+\sqrt{2}\right[$

$0<e^x<1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x<\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

$-y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow y>0 \text{ et } \left(y=1-\sqrt{2} \text{ ou } y=1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow y=1+\sqrt{2}$

$e^x=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

$-y^2+2y+1<0 \Leftrightarrow y>0 \text{ et } \left(y\in\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right[\text{ ou } y\in\left]1+\sqrt{2};+\infty\right[\right) \Leftrightarrow y\in\left]1+\sqrt{2};+\infty\right[$

$1+\sqrt{2}<e^x \Leftrightarrow x>\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right[$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]\ln\left(1+\sqrt{2}\right);+\infty\right[$

. 3) Résolvez l'équation différentielle $3y'-12y=0$ et déterminez-en la solution f telle que $f(1)=e^4$.

12 points (4+6+2)

IV. 1) g est la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $g(x)=2x+3+2x\ln x$.

a) Dressez le tableau de variations de g. (les limites ne sont pas demandées)
b) Calculez les coordonnées de l'extremum.
c) Déduisez-en le signe de $g(x)$.

2) f est la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=(2x+3)\ln x$.

a) Calculez les limites de f aux bornes de $\left]0;+\infty\right[$ et indiquez les équations des asymptotes éventuelles parallèles aux axes.
b) Vérifiez que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ et dressez le tableau de variations de f.
c) Montrez que l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique dans $\left]0;+\infty\right[$. Trouvez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de cette solution.
d) Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

15 points (3+0,5+1+2,5+3+2+3)

V. On note f la fonction définie par $f(x)=3x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Justifiez chacune des affirmations suivantes :

1) f est définie sur $\mathbb{R}$,
2) f est une fonction impaire,

3) la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_f,

4) la droite d'équation $y = 3x - \frac{1}{2}$ est asymptote à C_f.

7 points (1+3+2+1)

VI. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ r $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - 2}$ avec a et b réels. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Trouvez les réels a et b tels que :

C_f passe par le point $A(1;-3)$

C_f admet au point d'abscisse 1 une tangente de pente 2.

5 points