

Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2006

BRANCHE : *Mathématiques I*

DATE : *Session mai - juin 06*

DUREE : *2h15*

Exercice I (3+2+4 = 9 points)

1) a) Démontrer que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

b) En déduire que : $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$

et $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ pour tous réels a et b .

2) Démontrer que les solutions dans \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = ay$ ($a \neq 0$) sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Exercice II (3+3+4+2 = 12 points)

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) Calculer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
- 2) Calculer la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C_f .
- 3) f est-elle dérivable en -3 ? en 1 ?
- 4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

Exercice III (2+3+3+2 = 10 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.

2) On considère l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ (E)

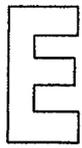
- a) Vérifier que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1)e^{2x}$ est la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.
- b) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.
- c) Dresser un tableau de variations pour f .

Exercice IV (1+1+4 = 6 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} + e^x - x + 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- a) Prouver que la droite d'équation $y = 1 - x$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.
- b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
- c) Résoudre l'inéquation $f'(x) \leq 0$.





Ministère de l'Éducation Nationale et de la Formation Professionnelle
EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
Régime technique – Division technique générale
Session 2006

Exercice V (3+2+1+1+3+3 = 13 points)

1) On définit la fonction f sur l'intervalle $I =]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - (x+1)\ln(x+1)$

a) Étudier $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (aide : poser $y = x+1$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.

c) Résoudre, dans I , l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$.

d) En déduire un tableau de variations de f sur I .

e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[e-1 ; e^2-1]$.

2) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$.

Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est du signe de $f(x^2)$ sur I .

Exercice VI (2+3+4+1 = 10 points)

On note f la fonction définie par $f(x) = \ln \frac{2x+1}{1-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Justifier chacune des affirmations suivantes :

a) f est définie sur $I =]-\frac{1}{2}; 1[$,

b) pour $x \in I$: $f'(x) = \frac{3}{(1-x)(2x+1)}$,

c) $A\left(\frac{1}{4}, \ln 2\right)$ est centre de symétrie à C_f ,

d) La droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ est asymptote à C_f .