Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale

Session 2006

BRANCHE : ***Mathématiques I***

DATE : Session mai - juin 06 *DUREE :* 2h15

Exercice I (3+2+4 = 9 points)

1) a) Démontrer que pour tous réels a > 0 et b > 0 on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

b) En déduire que : $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ pour tous réels a > 0 et b > 0

et $e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$ pour tous réels a et b.

2) Démontrer que les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ ($a \neq 0$) sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Exercice II (3+3+4+2 = 12 points)

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $]-\infty\,;-3] \cup [1\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Calculer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2) Calculer la limite de f en $+\infty$ et justifier que la droite d'équation $y = 2x+1$ est asymptote à C_f.
3) f est-elle dérivable en -3 ? en 1 ?
4) Calculer $f'(x)$ pour $x \in\,]-\infty\,;-3[\, \cup\,]1\,;+\infty[$.

Exercice III (2+3+3+2 = 10 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.

2) On considère l'équation différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ (E)

a) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\,e^{2x}$ est la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.
b) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.
c) Dresser un tableau de variations pour f.

Exercice IV (1+1+4 = 6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + e^{x} - x + 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a) Prouver que la droite d'équation $y = 1 - x$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.
b) Etudier la limite de f en $+\infty$.
c) Résoudre l'inéquation $f'(x) \leq 0$.

Le Commissaire du Gouvernement,

Exercice V (3+2+1+1+3+3 = 13 points)

1) On définit la fonction f sur l'intervalle $I =]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x-(x+1)\ln(x+1)$

a) Etudier $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *(aide : poser y = x+1)* et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.

c) Résoudre, dans I, l'inéquation $1-\ln(x+1) > 0$.

d) En déduire un tableau de variations de f sur I.

e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[e-1\,;e^2-1]$.

2) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$.

Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est du signe de $f(x^2)$ sur I.

Exercice VI (2+3+4+1 = 10 points)

On note f la fonction définie par $f(x) = \ln\dfrac{2x+1}{1-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Justifier chacune des affirmations suivantes :

a) f est définie sur $I = \left]-\dfrac{1}{2};1\right[$,

b) pour $x\in I$: $f'(x) = \dfrac{3}{(1-x)(2x+1)}$,

c) $A\left(\dfrac{1}{4},\ln 2\right)$ est centre de symétrie à C_f,

d) La droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est asymptote à C_f.