LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES
2017

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHE I	GE/GI	*Durée de l'épreuve* 3 heures
		Date de l'épreuve 24/05/2017
		Numéro du candidat

I. Démontrez les théorèmes suivants :

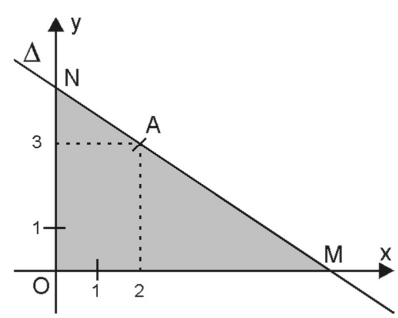
<u>Théorème 1 :</u> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre qui appartient à I. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

<u>Théorème 2 :</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

3+5 = 8 points

II. Dans un repère orthonormé on considère une droite Δ de pente strictement négative qui passe par A(2 ; 3). Δ coupe l'axe (Ox) en M et l'axe (Oy) en N.

1. Soit x l'abscisse du point M avec x > 2, montrez que l'aire du triangle OMN est donnée par $A(x)=\frac{3x^2}{2(x-2)}$.
2. Comment doit-on choisir la position du point M pour que l'aire du triangle OMN soit minimale ?



4+4 = 8 points

III. Résolvez dans IR $2\ln(x+1)=\ln\frac{x^3+1}{x}$.

5 points

IV. Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x}{\ln(x+1)}$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

1+3+7 = 11 points

V. Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=x\ e^{-\frac{x}{2}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Combien de tangentes à C_f passent par le point A(-1 ; 0) ?

5 points

VI. Soit la fonction f définie sur IR* par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x - 1}$. On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interprétez-les graphiquement.
2. C_f admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? en $-\infty$? Justifiez !
3. Dressez le tableau de variations complet.

4+2+5 = 11 points

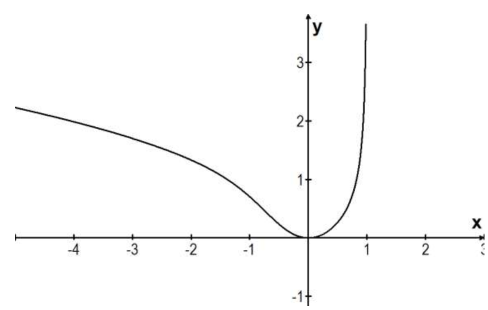
VII. a) Trouvez deux réels a et b tels que pour tout réel x dans IR–{-1 ; 1}, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ et déduisez-en $I = \int_2^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx$.

b) Calculez $J = \int_2^3 \frac{\ln(x^2-1)}{x^2}\,dx$. Donnez la valeur exacte.

4+4 = 8 points

VIII. Soit la fonction f définie sur]-∞ ; 1[par $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (voir graphique ci-contre).

Déterminez le signe de $f(x)$ et calculez l'aire de la surface comprise entre C_f, l'axe (Ox) et les droites d'équations x = -2 et x = $\frac{1}{2}$.



4 points