Code branche MATHE II	Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique - Session 2015	
Épreuve écrite	Branche	Division/Section
Durée de l'épreuve 2h00	MATHÉMATIQUES II	GE
Date de l'épreuve 5 juin 2015	Repêchage	

Question 1

(4 points)

Démontrer le théorème suivant :
Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
2. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$

Pour diviser deux nombres complexes, on divise les modules et on retranche les arguments.

Question 2

(6+3+6=15 points)

Considérons les nombres complexes :

$$z_1 = -\frac{3}{2}(1+i) \qquad z_2 = i\left(i+\sqrt{3}\right) \qquad z_3 = -\sqrt{2}\left(i\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)$$

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
2. Montrer que $Z = \frac{(\overline{z_2})^4}{(z_3)^3}$ est un nombre imaginaire pur.
3. Écrire $z' = z_1 \cdot z_2$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Question 3

(2+1=3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

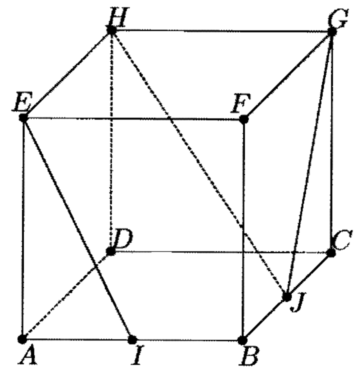
$$z_A = -2+2i \qquad z_B = -3-i \qquad z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

1. Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. $ABCD$ est-il un losange ? Justifier !

Question 4

(4+2+4+3=13 points)

Dans le cube d'arête 1 ci-contre, on considère le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. I est le milieu de $[AB]$ et J et le milieu de $[BC]$.



1. Notons θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JG}$. Calculer la valeur approchée de θ au dixième de degré près.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (EI) et de la droite (HJ).
3. Étudier la position relative de ces deux droites.
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection P de (HJ) avec le plan $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})$.

Question 5

(4+2+1+4=11 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, considérons les points $A(-1;2;1)$, $B(2;0;3)$, $C(-5;2;-1)$ et $D(4;3;-2)$.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan et que $\vec{n}(2;-1;-4)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
4. Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur (ABC).

Question 6

(5+5+4=14 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par les points $A(4;1;0)$, $B(-2;-3;-2)$ et $C(3;-5;1)$. Les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont définis par $\mathcal{Q} : x - 2y - 3z - 3 = 0$ et $\mathcal{R} : 3x - 3y - 5z - 8 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Montrer que les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont sécants suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.
3. Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.