

Code branche <b>MATHE I</b>	Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Session 2013/2014	
Épreuve écrite	Branche	Division / Section
Durée épreuve <b>3h</b>	<b>Mathématiques I</b>	<b>GE / GI</b>
Date épreuve <i>14.05.2014</i>		

**Question I (4+4 = 8 points)**

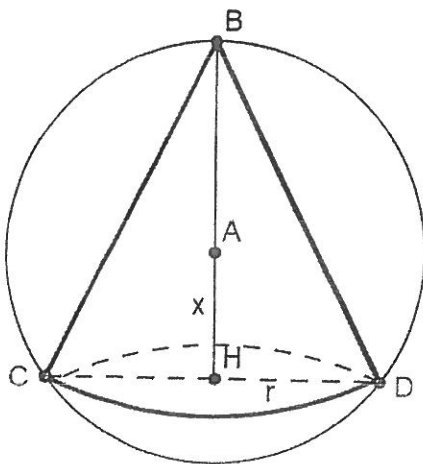
1) Démontrer le théorème suivant :

« Pour tout réel  $a$  et tout réel  $b$ ,  $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$  »

2) Démontrer le théorème suivant :

« Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un nombre appartenant à  $I$ .  
Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ . »

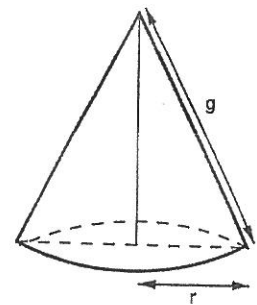
**Question II (3+1+3 = 7 points)**



Dans une sphère de centre A et de rayon 6 cm, on inscrit un cône de révolution de rayon  $r$  cm et de hauteur  $BH \geq 6$  cm.

On note  $x$  la distance AH exprimée en cm, avec  $x \in [0; 6[$ .

- 1) Exprimer BH, puis HD et BD en fonction de  $x$ .
- 2) Montrer que l'aire latérale (\*) exprimée en  $\text{cm}^2$  de ce cône est égale à  $A(x) = 2\sqrt{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{-x^3 - 6x^2 + 36x + 216}$
- 3) Déterminer les dimensions (rayon et hauteur) du cône dont l'aire latérale est maximale.



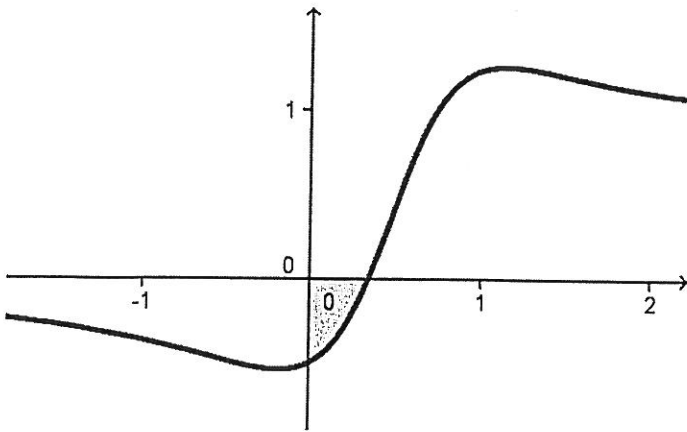
(\*) Pour calculer l'aire latérale du cône, utiliser la formule suivante :  $A = \pi \cdot r \cdot g$

**Question III (1+5 = 6 points)**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 (x+1)e^{x^2+2x} dx$$

$$J = \int_0^1 (x^2 + 2x)e^{x+1} dx$$

**Question IV (5+3+2+7+3 = 20 points)**

Voici la représentation graphique  $C_f$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{e^{2x} - 2}{e^{2x} - 4x + 1}$ .

- 1) Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Montrer que  $C_f$  admet deux asymptotes horizontales et écrire pour chacune une équation.

- 3) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{2h(x)}{(e^{2x} - 4x + 1)^2}$ , avec :  $h(x) = -4xe^{2x} + 5e^{2x} - 4$ .
- 4) Etudier les variations de la fonction  $h$  et en déduire que l'équation  $h(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ . Encadrer  $\alpha$  et  $\beta$  à 0,01 près.
- 5) Déterminer l'abscisse du point d'intersection I de  $C_f$  et de l'axe des abscisses, puis calculer l'aire de la surface grisée.

**Question V ((1+3)+6+4 = 14 points)**1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

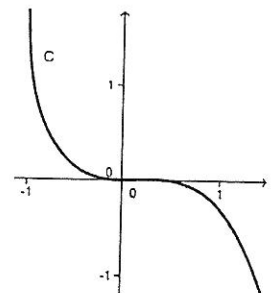
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + \frac{\ln(x)}{x-1} & , \text{si } x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ 4 & , \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- a) Montrer que cette fonction est continue en  $x = 1$ .
- b) Montrer que la courbe représentative  $C_f$  de cette fonction admet deux asymptotes et indiquer pour chacune une équation.

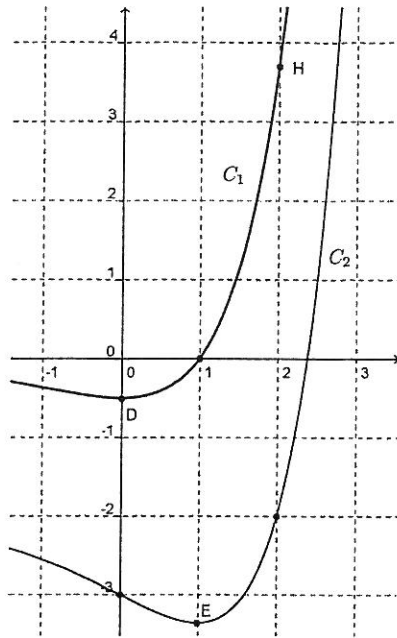
2) Résoudre l'équation suivante :  $\ln(x+1) - \ln\sqrt{4-x} = \frac{1}{2}\ln(x+3)$ .3) La courbe C représente la fonction  $h$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{2} - 2x^3 + x - \ln(x+1) \right).$$

La fonction  $h$  semble être décroissante sur  $]-1; +\infty[$ .  
Est-ce le cas ? Justifier !



Question VI ((2+1)+2 = 5 points)



1) Voici les courbes représentatives d'une fonction  $f$  et d'une de ses primitives  $F$ .  
 On sait que la tangente en E à la courbe  $C_2$  est horizontale,  
 que l'ordonnée de D est  $-\frac{1}{2}$  et que l'ordonnée de H est  $\frac{e^2}{2}$ .

- a) Attribuer à chaque fonction la courbe qui convient. Justifier.
- b) Calculer :  $\int_0^2 f(x)dx$ .

2) La courbe C représente la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = ax \ln(x) + bx$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.  
 On sait que T est la tangente à C en A.  
 Déterminer les réels  $a$  et  $b$ .

