Code branche	Ministère de l'Education nationale et de la Formation professionnelle EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique – Division technique générale **Section technique générale - Session 2012/2013**	
MATHE1		
Épreuve **écrite**	*Branche*	*Division / Section*
Durée épreuve **3h**	**Mathématiques I**	**GE/GI**
Date épreuve 16.9.2013		

Question 1 — 2 + 6 + 2 = 10 points

Démontrer: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

Question 2 — 4 + 2 = 6 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln\sqrt{2x-3}<\ln(6-x)-\dfrac{1}{2}\ln x$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2e^{-2x}-3e^{-x}-20=0$.

Question 3 — 2 + 1 = 3 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)e^{-2x}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une unique asymptote horizontale d dont on précisera une équation.

2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale d.

Question 4 — 8 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Montrer qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Question 5	$(2+2)+(1+2+2+2+2)=13$ points

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ln x}{x}$.

I. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-2\ln x$.

1. Déterminer les limites de g aux bornes du domaine de définition.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction g et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

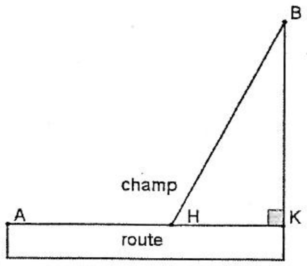
II. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et montrer que la droite Δ d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ sur $]0;+\infty[$.

   Montrer en particulier que $\mathscr{C}$ coupe Δ en un point A que l'on déterminera.
4. Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Tracer Δ et $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal d'unités 2 cm.

Question 6	$2+2+3=7$ points

Un tracteur doit aller d'un point A situé sur une route à un point B situé dans un champ. Sur la route, le tracteur a une vitesse de 40 km/h, alors que dans le champ sa vitesse est de 20 km/h.



On sait que $AK=4$ km et $BK=3$ km.

Soit H le point où le tracteur quitte la route. On suppose que $H\in[AK]$.

1. On pose $x=AH$.

   Déterminer la distance BH en fonction de x.
2. Soit t la fonction définie sur $[0;4]$ par $t(x)=\dfrac{1}{40}\left(x+2\sqrt{x^2-8x+25}\right)$.

   Montrer que $t(x)$ exprime le temps, en heures, mis par le tracteur pour aller du point A au point B.
3. Déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

Question 7 — 3 + (1 + 4 + 1) + 4 = 13 points

A. Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+5}\right)$.

Déterminer $f'(x)$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\, dx$.

B. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2x)\cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+2x)\sin^2 x\, dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. En déduire les valeures exactes de I et de J.

C. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de g dans un repère orthonormal.

Calculer l'aire A en u.a. du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \sqrt{e}$.