

**BRANCHE : Mathématiques I**

DATE : 27.05.04

DUREE : 2 h 15 min

**I (6 + 4 = 10 points)**

1) Démontrer:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2) Démontrer : La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et est égale à sa fonction dérivée :  $(\exp)' = \exp$ .

**II (4 + 4 = 8 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty ; 0 ] \cup [ 7 ; +\infty [$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$   
 Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1) Démontrer que  $C_f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  dont on déterminera une équation.
- 2) Démontrer que  $C_f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

**III (5 + 3 = 8 points)**

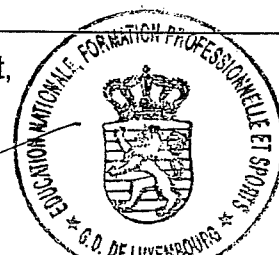
Soit  $f$  la fonction définie sur  $] 0 ; +\infty [$  par  $f(x) = x \cdot (a \ln x + b e^{-x})$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )  
 Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.  
 La tangente à  $C_f$  au point  $A(1 ; 2)$  est parallèle à la droite  $d$  d'équation  $x + y = 0$ .

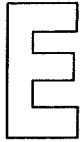
- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$ .
- 2) Est-ce que  $C_f$  admet des asymptotes parallèles aux axes du repère ? Justifier.

**IV (4 + 4 = 8 points)**

Résoudre:

- 1)  $2 \cdot \ln(2 - 3x) = \ln(4x + 8) + \ln(5 - 4x)$
- 2)  $2e^x + e^{-x} \leq 3$





V (1 + 3 + 5 + 6 + 3 = 18 points)

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{3}{4}x + \ln(2-x) - \ln(5-x)$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
- 2) Déterminer les limites aux bornes du domaine et préciser les asymptotes (éventuelles) parallèles aux axes du repère.
- 3) a) Démontrer que  $C_f$  admet une asymptote oblique  $d$  dont on déterminera une équation.  
b) Étudier la position de  $C_f$  par rapport à  $d$ .
- 4) Étudier les variations de  $f$ .
- 5) Construire  $C_f$  et ses asymptotes (unité: 1 cm).

VI (3 + 3 + 2 = 8 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} - x$

Soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- 1) Étudier les variations de  $f$ .
- 2) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition.
- 3) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Trouver un encadrement de  $\alpha$  à un dixième près.