



BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHEMATIQUES II	GI	Durée de l'épreuve 2h
		Date de l'épreuve 12/06/2017
		Numéro du candidat

### I. Probabilités et combinatoire

(5+((1+2+2+2)+1)+7 = 20 points)

- Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire simultanément et sans remise 3 boules au hasard. L'expérience est poursuivie jusqu'à ce que l'urne soit vide. Quel est le nombre d'issues possibles ?
- On considère le nombre 1987. On utilise les quatre chiffres de ce nombre et, en les permutant au hasard, on obtient un nombre de quatre chiffres. On dit qu'il y a coïncidence à chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale.
  - Existe-t-il des nombres présentant exactement trois coïncidences ? Expliquer.
    - Combien de nombres présentent exactement deux coïncidences ? Expliquer.
    - Combien de nombres présentent exactement une coïncidence ? Expliquer.
    - En déduire combien de nombres ne présentent aucune coïncidence.
  - Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de coïncidences observées. Calculer son espérance  $E(X)$ .
- Démontrer que pour tous naturels  $n$  et  $k$  tels que  $2 \leq k \leq n$ ,  $C_n^2 = C_k^2 + k(n-k) + C_{n-k}^2$ .

### II. Matrices

(2+(3+4)+(2+3+6) = 20 points)

- Démontrer le théorème suivant :  
« Soit  $A$  une matrice carrée. Si  $A$  admet une matrice inverse, celle-ci est unique. »
- On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - Démontrer que la matrice  $A$  est inversible pour tout nombre naturel  $a$ .
  - Déterminer la matrice inverse  $A^{-1}$  en fonction de  $a$ .
- On considère les matrices  $U = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - Calculer  $N^2$ .
  - Exprimer  $U$  en fonction de  $N$  et de  $I$ .
    - En déduire qu'il existe  $x$  et  $y$  tels que  $U^2 = xN + yI$ .
  - Montrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $k$ ,

$$U^k = k \cdot 7^{k-1}N + 7^k I.$$

### III. Géométrie dans l'espace

(3+(2+2+2+4+2+5) = 20 points)

1) Démontrer le théorème suivant :

« Si, dans un **repère orthonormal**,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives  $(x; y; z)$  et  $(x'; y'; z')$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$  ».

2) Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère

- les points  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 0; 1)$ ,  $C(-1; 0; 1)$ ,  $D(-1; -2; 3)$  et  $E(3; 2; -1)$
- la droite  $\Delta$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -1 + 3t \\ y &= t \\ z &= 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- (a) Les trois points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.
- (b) Le vecteur  $\vec{n}(0; 1; -1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
- (c) La droite  $(DE)$  et le plan  $(ABC)$  sont parallèles.
- (d) Le plan  $(ABC)$  coupe le segment  $[DE]$  en son milieu.
- (e) Les droites  $(AB)$  et  $\Delta$  sont parallèles.
- (f) Les droites  $(AB)$  et  $\Delta$  sont sécantes.