LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES 2017

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	GE/GI	*Durée de l'épreuve* 3h
		Date de l'épreuve 13/06/2017
		Numéro du candidat

Question 1 (5+3=8 points)

Démontrer les théorèmes suivants:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
2. Pour tous réels a>0 et b>0 :
   $ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Question 2 (4+3=7 points)

Une boîte à bijoux a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée. Soit x>0, la longueur d'un côté de la base en mètre.

La boîte a un volume de 1,5L. Le matériau utilisé pour construire les bases coûte 600 euros le mètre carré et celui utilisé pour les faces latérales coûte 400 euros le mètre carré.

1. Montrer que le prix de la boîte est donné par:
$$P(x) = 1200x^2 + \frac{2,4}{x}$$
2. Déterminer les dimensions de la boîte en dm, pour que le prix de revient soit minimal.

Question 3 (3+3=6 points)

1. Résoudre dans IR l'inéquation suivante:
   $ln(4-3x) \leq 2\ln(3-2x) - \ln x$
2. Résoudre dans IR l'équation suivante:
   $e^x(2-9e^{-2x}) = 7$

Question 4 (1+3+4+2+2+2=14 points)

Soit f la fonction définie par f(x)=$\frac{x+\ln(2x)}{x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine. Interpréter graphiquement.
3. Etudier les variations de f.
4. Construire C_f et ses asymptotes dans un repère orthonormal.
5. Etablir une équation de la tangente t au graphe C_f de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   Représenter t dans le même repère que C_f.
6. Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{x+\ln(2x)}{x}dx.$

   Que représente cette valeur trouvée sur le graphique?

Question 5 (4+2=6 points)

Soit la fonction f définie par f(x)=$\frac{e^x-1}{3e^x+1-x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la dérivée de f.

Question 6 (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR -{1}par f(x)=$\frac{e^x}{x-1}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

Montrer qu'il existe une seule tangente à la courbe passant par le point A(1;0).

Question 7 (4+3+2=9 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine.
2. Etudier les variations de f.
3. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans]0;+∞[et donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Question 8 (3+2=5 points)

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x \sin(2x)\, \mathrm{dx}$
2. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}\, \mathrm{dx}$
