

Code branche MATHE II	Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES Régime technique - Session 2015/2016	
Épreuve Ecrite	Branche	Division/Section
Durée de l'épreuve: 2h	MATHEMATIQUES II	GI
Date de l'épreuve: 30.05.2016		

I. Probabilités et combinatoire

(2+6+(3+3+5) = 19 points)

1) Démontrer :

« Pour tous naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$, $C_n^{n-p} = C_n^p$. »

2) Monsieur Miller arrive à New York en avion avec trois valises. À l'arrivée, les bagagistes font défiler les 480 bagages de l'avion un par un au hasard sur le tapis roulant.

Calculer la probabilité P pour que les trois valises de Monsieur Miller se suivent sur le tapis.

(La probabilité sera donnée sous forme de fraction irréductible.)

3) Le grand condor du zoo se nourrit de souris. La réserve de souris héberge cinq souris blanches, dont deux femelles, et sept souris grises, dont trois femelles. Le gardien chargé de sa nourriture attrape simultanément et au hasard trois souris. Déterminer la probabilité des événements suivants :

(Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.)

A : « le gardien a attrapé au plus une souris grise »

B : « le gardien a attrapé au moins une souris femelle »

C : « le gardien a attrapé exactement une souris mâle et une souris blanche »

II. Matrices

(2+(2+5)+(2+6+1) = 18 points)

1) Démontrer le théorème suivant :

« Soit A une matrice carrée. Si A admet une matrice inverse, celle-ci est unique. »

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$.

(a) Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle inversible ?

(b) Calculer dans ce cas son inverse A^{-1} en fonction de a .

3) On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer N^3 .

(b) Montrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel k ,

$$B^k = I + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2.$$

(c) Ecrire la matrice B^5 en précisant tous ses coefficients.

III. Géométrie dans l'espace

$((2+2+2+5)+(3+5+4) = 23 \text{ points})$

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on donne les quatre points $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$, $C(6; -2; -1)$ et $D(0; 4; -1)$.

- 1) (a) **Démontrer**, à l'aide du produit scalaire, que le triangle ABC est rectangle en A .
(b) Soit \mathcal{P}_1 le plan d'équation cartésienne : $x + y + z - 3 = 0$.
Prouver que \mathcal{P}_1 est orthogonal à la droite (AB) .
(c) Soit \mathcal{P}_2 le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) .
Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_2 .
(d) **Déterminer** un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .
- 2) (a) **Démontrer** que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .
(b) **Calculer** le volume du tétraèdre $ABCD$.
- 3) **Calculer une mesure** de l'angle \widehat{BDC} .