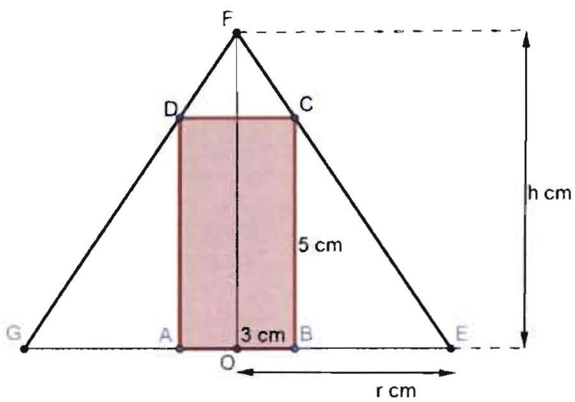
Code branche	Ministère de l'Education nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES TECHNIQUES **Régime technique - Session 2015/2016**	
MATHE I		
Épreuve écrite	*Branche*	*Division / Section*
Durée épreuve 3 heures	**Mathématiques I**	**GE/GI**
Date épreuve 23.5.2016		

Question 1 (8 points)

Démontrer le théorème suivant :

Pour tout réel x et tout entier relatif n, $\exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$

Question 2 (4+4 = 8 points)



Une firme a dans sa gamme des pots de crème. Les pots ont une forme cylindrique de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm. Pour des raisons de marketing on veut emballer ces pots dans des boîtes transparentes qui ont la forme d'un cône de hauteur h (en cm), avec $h \in]5;+\infty[$ et de rayon r (en cm), avec $r \in]3;+\infty[$.

1) Montrer que pour tout $h \in]5;+\infty[$, le volume du cône est $V(h) = 3\pi \cdot \dfrac{h^3}{(h-5)^2}$.

2) Déterminer les dimensions du cône pour que son volume soit minimal.

Question 3 (4+4 + 2+5+2+2 = 19 points)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=1+e^{2x}(x-1)$.

   a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

   b) Calculer $g(0)$.

   Démontrer que dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α.

   Donner un encadrement de α à 0,1 près.

   En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{x^2}{1-e^{2x}}$, si $x\neq 0$.

   a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

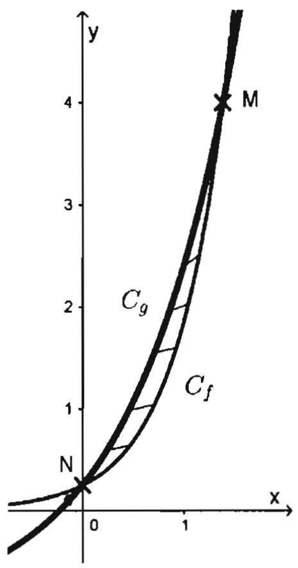
   b) Démontrer que la fonction f est continue en $x=0$ et

   démontrer que la fonction f est dérivable en $x=0$ et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

   c) Démontrer que pour tout $x\neq 0$: $f'(x)=\dfrac{2x\cdot g(x)}{\left(1-e^{2x}\right)^2}$

   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Question 4 (3+3 = 6 points)



Sur le graphique ci-contre sont représentées les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{4}e^{2x}$ et $g(x)=\dfrac{5}{4}e^{x}-1$.

1) Déterminer les abscisses des points d'intersection M et N des courbes C_f et C_g.

2) Calculer l'aire A de la surface hachurée.

Question 5 (2+5 = 7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 - \ln(2e^{2x} + 1)$ et C sa courbe représentative.

1) Montrer que la tangente T à C au point d'abscisse 0 est parallèle
   à la droite Δ d'équation : $x + 3y + 3 = 0$.

2) Montrer que $d_1 : y = x + 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.
   Montrer que C admet une asymptote oblique d_2 en $+\infty$, dont on déterminera une équation.

Question 6 (3+6 = 9 points)

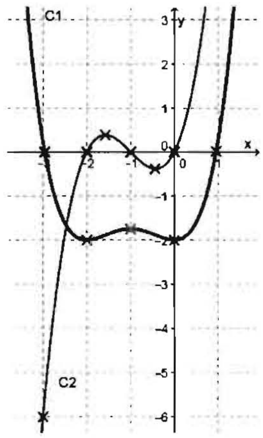
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) - x$ et C sa courbe représentative.

1) Calculer : $\int_1^{\frac{e}{2}} f(x)dx$.

2) Démontrer qu'il n'existe aucun point A de C,
   tel que la tangente à C en ce point A passe par le point M(2 ; -1).

Question 7 (2+1 = 3 points)

Sur le graphique ci-contre on voit les courbes qui représentent une fonction f et une de ses primitives F.



1) Associer à chacune des fonctions la courbe correspondante. Justifier.
2) Calculer $\int_{-3}^{0} f(x)dx$