Ministère de l'Éducation Nationale et de la Formation Professionnelle

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES TECHNIQUES

Régime technique – Division technique générale informatique

Session 2012

BRANCHE : MATHÉMATIQUES II

DATE : 4 juin 2012 *DURÉE : 2 H 15 MIN*

I. 1. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $3\binom{n+1}{2} = 2\binom{n}{n-2} + 25$. *5,5*

2. Une urne contient trois boules rouges et deux bleues. On tire *successivement* au hasard trois boules d'après la règle suivante : on remet la boule si elle est bleue, on ne la remet pas si elle rouge.
N désigne la variable aléatoire qui, après trois tirages, associe le nombre de boules rouges obtenues.
(i) Définir la loi de N. *6*
(ii) Calculer l'espérance de N. *1*

3. Trois médecins exercent dans un village. Quatre habitants malades appellent un médecin après avoir choisi l'un d'eux au hasard dans l'annuaire téléphonique.
Une issue est une liste d'appels du type $(x_1;x_2;x_3;x_4)$, où x_i représente un des trois médecins appelé par le $i^{\text{ème}}$ malade.
Calculer la probabilité qu'exactement deux médecins soient appelés. *2,5*

15

II. 1. α est un réel *non nul*. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(\alpha;2\alpha;\alpha-1)$, $B(0;2\alpha;-1)$ et $C(\alpha;0;\alpha)$.

Déterminer les coordonnées de A, B et C pour que l'angle $B\hat{A}C$ mesure 60°. *6,5*

2. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(-7;2;-4)$ et $B(-9;-2;0)$, le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-y+5=0$ et la droite d définie par $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=8-3\lambda \\ z=7\lambda+1 \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

a) Établir une équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{M}$ du segment $[AB]$. *3*

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection Δ de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M}$. *2,5*

c) d et Δ sont-elles coplanaires ? Justifier. *5,5*

17,5

III. 1. a) Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $u \neq 2$, $\frac{u^2-1}{u-2} = au + b + \frac{c}{u-2}$. *2*

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x - 2}$.

(i) Prouver que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{u^2(x)-1}{u(x)-2}\,u'(x)$ (u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$). *1,5*

(ii) Calculer la valeur moyenne de f entre $-\frac{\pi}{2}$ et π (valeur *exacte*). *6*

---

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

a) **(i)** À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 (valeur *exacte*). *2*

(ii) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $I_n = nI_{n-1} - 1$. *2*

(iii) En déduire la valeur *exacte* de I_2. *1*

b) **(i)** Prouver que, pour tout x dans $[0;1]$, $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$. *1,5*

(ii) En déduire un encadrement de I_n. *1,5*

(iii) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ en justifiant. *1*

18,5

IV. 1. On admet que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de l'addition est un groupe commutatif.
Démontrer que $(\mathbb{C};+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. *7*

2. Montrer que l'addition des matrices carrées d'ordre 2 est associative. *2*

9

Formules trigonométriques.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan } x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cotan } x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$